N° d'ordre : 51

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3e CYCLE EN PHYSIQUE NUCLÉAIRE

par

Roger LAVERRIÈRE

SUJET :

Production multiple de particules dans les intéractions à haute énergie

---

Soutenue en Janvier 1962 devant la Commission d'Examen

MM. A. SARAZIN, Président
J. LAFOUCRIÈRE
G. PHILBERT
} Examinateurs

N° d'ordre : 51

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3e CYCLE EN PHYSIQUE NUCLÉAIRE

par

Roger LAVERRIÈRE

SUJET :

Production multiple de particules dans les intéractions à haute énergie

---

Soutenue en Janvier 1962 devant la Commission d'Examen

MM. A. SARAZIN, Président
J. LAFOUCRIÈRE
G. PHILBERT
} Examinateurs

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550013_0040

U N I V E R S I T E D E L Y O N

FACULTE DES SCIENCES

Doyens Honoraires

MM. LONGCHAMBON
DOUIN
MOUSSA

Professeurs Honoraires

MM. LOCQUIN
de LARAMBERGUE
DOEUVRE
MM. SOLLAUD
MENTZER
MOUSSA

Doyen

M. GAUTHIER H.

Assesseur

M. BRACONNIER

Professeurs

MM.	LONGCHAMBON	Minéralogie
	DEJARDIN	Physique Générale
	DOUIN	Botanique
	EYRAUD H.	Calcul différentiel et Intégral
	COURTY	Chimie-Physique
	PRETTRE	Chimie Industrielle
	KUHNER	Microbiologie et Mycologie
	MALECOT	Mécanique Rationnelle et Appliquée
	PARIS	Chimie Minérale
	AUMERAS	Chimie
	COLONGE	Chimie Organique
	FLANDRIN	Géologie Appliquée
	JANIN	Physique Expérimentale
	BERNARD	Physique Industrielle
	DUFAY	Astronomie
	NIGON	Zoologie Expérimentale
	GAUTHIER H.	Géologie
	VIRET	Géologie
	WAUTHIER	Zoologie
	CHOPIN	Chimie Biologique
	CUEILLERON	Chimie
	BRACONNIER	Mathématiques
	EYRAUD Ch.	Chimie Physique Appliquée
	JAFFARD	Méthodes Mathématiques de la Physique
	SARAZIN	Physique Nucléaire
	PEREZ	Physiologie
	MESNARD	Electronique
	GRANDMONTAGNE	Physique
	BOIDIN	Botanique

Professeurs sans Chaire

MM.	BOUTILLIER	Minéralogie
	DREUX	Chimie organique
	LAFOUCRIERE	Physique Nucléaire
	TEICHNER	Chimie Industrielle
	GAUME	Physique
	MERLIN	Chimie M.P.C.
	PACHECO	Chimie Biologie
	PAVANS DE CECCATY	Zoologie
	PHILBERT	Physique Nucléaire

Maîtres de Conférences

MM.	DEPRAZ	Physique Nucléaire
	FERON	Mathématiques
	BERSILLON	Physiologie Végétale S.P.C.N.
	DAVID L.	Géologie
	GAUTHIER J.	Chimie
	LAFORGUE	Physique
	LEGAY	Zoologie expérimentale S.P.C.N.
	UZAN	Physique S.P.C.N.
	CHENEVOY	Géologie appliquée
Mle	MAITROT	Physique
MM.	CHANEL	Phychophysiologie
	ASCH	Physique
	DUFAY M.	Physique
	GINET	Zoologie
	MAURY	Mathématiques
	MICHEL	Minéralogie
Mme	ERICSON	Physique Générale
	GEVIN	Géologie
	PONASSE	Mathématiques
	MARTEL	Mathématiques
	CHERY	Physique
	LEFEBVRE	Mathématiques
	d'INCAN	Physique
	COHEN-ADAD	Chimie
	PERNET	Mathématiques

Maîtres de Conférences Adjoints

MM.	PIERRON	Chimie
	LEMONDE	Physique

Secrétaire Principal Honoraire

M. ROUX

Secrétaire Principal

M. BURNET

A MES PARENTS

A MA SOEUR

A MA FIANCEE

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur PHILBERT, sous la direction de qui ce travail a été effectué, pour l'aide et les encouragements qu'il n'a cessé de me prodiguer.

Je remercie aussi Monsieur le Professeur SARAZIN, Directeur de l'Institut de Physique Nucléaire de LYON et Monsieur le Professeur LAFOUCRIERE pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et les conseils qu'ils m'ont donnés lors de la rédaction du manuscrit.

J'exprime ma plus profonde gratitude aux Physiciens du Centre Européen de Recherche Nucléaire de Genève, les Drs HAGEDORN, ERICSON, SELLERI, ŠOLN, pour les discussions qu'ils ont bien voulu avoir avec moi et les indications qu'ils m'ont données sur leurs travaux. Ma reconnaissance va tout particulièrement au Docteur HAGEDORN qui m'a fait profiter de sa compétence dans ce domaine de recherches, m'a guidé tout au long de mon travail et a bien voulu prendre le soin de corriger le manuscrit.

Que Monsieur le Professeur MALECOT, de l'Institut de Mathématiques de Lyon, qui m'a conseillé sur des questions de calcul de probabilité, trouve ici l'expression de ma sincère reconnaissance.

Je remercie mes collègues de l'Institut de Physique Nucléaire, et en particulier J. DUFOUR et J. GREA, pour l'amitié qu'ils m'ont témoignée. Je suis particulièrement redevable envers J. GREA dont l'aide m'a été précieuse notamment lors de la programmation des calculs sur ordinateur électronique.

Ces calculs n'ont pu être menés à bien que grâce aux excellentes conditions de travail qui ont été mises à ma disposition par l'Agence IBM de Lyon et par le Centre de Calcul Automatique de Nancy, tout spécialement par son directeur Monsieur le Professeur LEGRAS. A tous, j'adresse mes plus sincères remerciements.

A ceux-ci, je voudrais joindre enfin Mademoiselle ROCHE qui a apporté tant de soin à la dactylographie du texte.

I N T R O D U C T I O N

La construction d'accélérateurs de plus en plus puissants a permis l'étude expérimentale des intéractions de particules élémentaires à des énergies allant jusqu'à 30 GeV. Parallèlement à ces travaux, des études théoriques ont été entreprises dans le but d'interpréter les phénomènes observés. Parmi ces phénomènes, un des plus intéressants est celui de la production multiple de particules.

Aux environs de 1950, ce problème a été abordé par deux voies différentes : HEISENBERG et LEWIS-OPPENHEIMER-WOUTHUYSEN ont essayé une théorie quantique, tandis que FERMI a proposé une théorie appelée "théorie statistique". C'est à dette dernière que nous nous sommes intéressés.

Cette théorie est basée sur l'idée d'équilibre thermodynamique : la probabilité pour qu'un système donné de particules soit produit est proportionnelle au nombre d'états dans lequel ce système peut se trouver. Il apparaît actuellement, compte-tenu des dernières expériences réalisées, que la théorie statistique ne rend pas compte de l'ensemble des phénomènes. Cependant, il reste important de connaître de façon exacte ses prédictions ; il est permis d'espérer que, par une étude appronfondie des différences entre celles-ci et les phénomènes réels, la nature des intéractions entre particules fondamentales pourra être précisée.

Le chapitre I est consacré à l'étude de la théorie statistique telle qu'elle a été proposée sous sa forme originale par FERMI, aux modifications et aux améliorations qui lui ont été apportées ultérieurement et aux problèmes annexes qui se posent lors de l'étude de la production multiple de particules. A la fin de la thèse, la bibliographie correspondante est indiquée.

Une des difficultés qui ont rendu l'utilisation de la théorie statistique pénible est l'évaluation du facteur dit "élément de l'espace des phases" qui est lié à la densité (nombre par intervalle d'énergie) d'états cinématiques. Nous rappelons brièvement (chapitre II), comment ce facteur avait été calculé, d'abord par des méthodes "classiques" plus ou moins compliquées : approximations sur les conditions cinématiques des particules ou sur les intégrations elles-mêmes ; puis par une méthode dite "de Monte-Carlo" (chapitre III, 1ère partie). Cette méthode élaborée par CERULUS et HAGEDORN (CERN) est correcte, mais impose des calculs extrêmement longs, même avec un ordinateur électronique. Le Dr. HAGEDORN nous proposa,en relation avec le Dr. ERICSON, d'étudier et de mettre au point une méthode d'approximation permettant de simplifier son calcul de Monte-Carlo (chapitre III, 2ème partie). Cette méthode, que nous appelerons "approximation gaussienne" consiste à remplacer une probabilité d'expression analytique compliquée par une fonction de Gauss. L'approximation simplifie le résultat final et réduit considérablement le programme des calculs.

Le chapitre IV est consacré à l'étude de la réalisation pratique des calculs et, en particulier, aux problèmes que posent l'utilisation de la méthode de Monte-Carlo et l'emploi d'ordinateur électronique.

Il nous a paru indispensable de vérifier la validité de la méthode d'approximation proposée. Cette partie du travail fait l'objet du chapitre V. Les résultats ont été satisfaisants. L'ordre de grandeur de l'erreur commise est suf-

fisamment faible et la durée des calculs considérablement diminuée. Par exemple sur ordinateur IBM 650, le calcul de l'élément d'espace des phases pour des états comprenant 5 et 10 particules demande respectivement respectivement 1 heure et 200 heures environ par la méthode complète, 25 minutes et 1 heure par l'approximation gaussienne.

Ces conclusions favorables nous ont permis d'effectuer le calcul de la production multiple de particules dans les collisions π^- - p à 5 GeV. Ce calcul a demandé 35 heures alors qu'il en eut fallu 450 environ avec la méthode complète. Les résultats sont les suivants :

- 80 % des intéractions conduisent à des états finaux contenant uniquement des nucléons et des mésons π.
- dans 12 %, il y a en plus production de particules étranges (Λ, K, Σ , Ξ),
- dans 6 %, production d'antinucléons,
- dans 2 %, production de paires mésons K - antimésons K,
- le nombre moyen de π créés est d'environ 2.3 et le nombre maximum 6.

Tous ces résultats sont en bon accord avec les résultats expérimentaux sauf pour la production d'antiprotons que la théorie donne nettement trop grande. Nous mettons ainsi en évidence une des faiblesses de la théorie statistique.

Nous donnerons pour terminer quelques indications sur la bibliographie : l'article fondamental relatif à la théorie statistique a été publié par FERMI dans "Progress of Theoretical Physics (Japon)" en 1950. De 1950 à 1954, aucun travail intéressant n'a été publié. A partir de 1954, à la suite de la mise en fonctionne-

ment des grands accélérateur, les articles, dûs surtout à des physiciens américain jusqu'en 1958, deviennent nombreux. Ils sont publiés dans "The Physical Review" :

- travaux théoriques de LEPORE-STUART (Berkeley), BLOCK, KOVACS, FIALHO, ...
- travaux expérimentaux de FOWLER, MAENCHEN, EISBERG, THORNWHITE, POWELL, WRIGHT, ... (laboratoire de Berkeley).

Depuis 1958, l'apport des physiciens européens devient important. Le groupe du CERN à Genève (HAGEDORN, CERULUS, VON BEHR, ...) a obtenu des résultats intéressants, résultats qui ont été publiés soit dans les rapports du CERN, soit dans "Il Nuovo Cimento".

Les travaux russes se divisent nettement en deux groupes :

- ceux de NIKISHOV, BELENKEI, MAKSIMENTO et ROZENTAL sont publiés dans "Journal of Experimental and Theoretical Physics (JETP) ; ils présentent généralement un réel intérêt.
- ceux de BARASHENKOV, MALTSEV, BARBASEV, BUBELEV (laboratoires de Doubna) sont publiés dans "Nuclear Physics".

C H A P I T R E I

E X P O S E D E S P R O B L E M E S

I - LES BASES DE LA THEORIE STATISTIQUE -

1 - La formule générale

Le problème consiste à étudier le processus d'intéraction dans lequel il y a deux particules dans l'état initial et n particules dans l'état final. Nous savons, d'après un résultat de mécanique quantique, que la probabilité de transition d'un système est proportionnelle au produit du carré de l'élément de matrice correspondant à l'intéraction par la densité des états finaux :

$$W \sim |S_{fi}|^2 . \rho_F \qquad (1)$$

Il faut calculer les deux facteurs intervenant dans W. L'état actuel de la théorie des champs ne permet pas de calculer les éléments de matrice correspondant à des processus de production multiple. Pour poursuivre le calcul, nous avons recours à une théorie proposée par FERMI et appelée "théorie statistique".

En se basant sur le fort couplage nucléon-nucléon et méson-nucléon, FERMI suppose que la température atteinte est si élevée qu'un équilibre thermodynamique est possible entre tous les états finaux. Un état final est défini par le nombre, la nature et l'état cinématique et quantique des particules qui le composent. La probabilité pour l'émission d'un certain système de particules, définies uniquement par leur nature, est proportionnelle au nombre d'états cinémati-

ques et quantiques dans lequel ce système peut se trouver à la suite de l'intéraction.

FERMI suppose que toute l'énergie disponible dans le système du centre de masse se trouve libérée dans un petit volume ω et propose de prendre comme volume ω une sphère ayant pour rayon r, la longueur d'onde de Compton du pion, et ayant subi la contraction de Lorentz :

$$r = \frac{h}{\mu c} = 1{,}2 \cdot 10^{-13} \text{ cm.}$$

$$\omega = \frac{1}{\gamma} \frac{4\pi}{3} r^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{(m_1 + m_2)c^2}{E} r^3$$

m_1 et m_2 étant les masses au repos des deux particules en intéraction, E l'énergie totale dans le système du centre de masse.

2 - Elément de matrice de la transition -

Nous supposerons, comme Fermi l'a proposé, que le carré de l'élément de matrice est proportionnel à la probabilité pour que les n particules de l'état final soient contenues en même temps à l'intérieur du volume ω.

Considérons d'abord 1 des n particules. Soit V le volume de normalisation : $V = mc^2/E = 1/\gamma$; la particule se trouve dans ce volume V. La volume ω est compris dans le volume V. La probabilité pour que la particule se trouve dans le volume ω est ω/V. Pour les autres particules, cette probabilité est la même. La probabilité totale de trouver les n particules dans le volume ω sera le produit de ces probabilités élémentaires.

Nous trouvons donc :

$$\left|S_{fi}\right|^2 \sim \left[\omega/V\right]^n \qquad (2)$$

3 - Densité des états finaux -

Elle est définie par :

$$P_F = \frac{dg_F}{dE}$$

g_F étant le nombre total détats finaux.

Soit g_i le nombre détats dans lequel peut se trouver une particule. Un état peut se représenter par un point dans l'élément d'espace des phases disponible par cette particule ou plutôt par un élément a_i de ce volume (principe d'incertitude). On a :

$$g_i = \frac{\Phi_i}{a_i}$$

On peut démontrer que cet élément de volume a_i est égal à h^3 (le 3 provenant du nombre de degrés de liberté du système), mais nous le verrons très simplement en considérant le principe d'incertitude de Heisenberg selon lequel l'indétermination sur l'état d'un système défini par les variables q_i est au minimum égale à :

$$\prod q_i^r = h^r$$

r étant le nombre de degrés de liberté.

Nous avons donc : $a_i = h^3$.

Nous pouvons décomposer l'espace des phases en un produit du volume d'espace des moments qui est $\int \overrightarrow{dp_i}$, par le volume d'espace ordinaire qui est le volume V ; le volume de normalisation.

Nous avons donc : $g_i = \frac{V}{h^3} \int \overrightarrow{dp_i}$

Le nombre total d'états finaux sera le produit de ces nombres partiels.

$$g_F = \prod_i g_i = \left[\frac{V}{h^3}\right]^n \prod_i \int \overrightarrow{dp_i}$$

et la densité des états finaux sera :

$$P_F = \left[\frac{V}{h^3}\right]^n \frac{d}{dE} \prod_1^n \int \overrightarrow{dp_i}$$

4 - Les conditions physiques -

Il faut d'abord tenir compte de la conservation de l'impulsion et de l'énergie. Ces deux conditions interviennent dans le calcul de l'élément d'espace des phases ou plus exactement espace des moments $\prod_1^n \int \overrightarrow{dp_i}$ qui fera l'objet des chapitres ultérieurs.

Le poids statistique dû au spin s'introduit par un facteur donnant la multiplicité des états des particules à spin. Ce facteur est égal à : $\prod_1^n (2 s_i + 1)$, s_i étant le spin de la particule i.

Nous tenons compte de l'indiscernabilité en divisant le poids statistique par le facteur $\prod N_i !$, N_i étant le nombre de particules indiscernables. Nous tenons compte aussi de la conservation du spin isotopique en introduisant un facteur P(T) qui est proportionnel au nombre d'états dans l'espace de spin isotopique qui est compatible avec le nombre, la nature, la charge totale et le spin isotopique total des particules que l'on considère. Tous ces facteurs seront examinés plus en détail au chapitre **VI**, lors des applications numériques. Faisons remarquer que, dans tous les calculs ultérieurs, nous ne considérons pas le moment angulaire.

5 - Expression du poids statistique -

Regroupant (1), (2) et (3) et tenant compte des différents facteurs introduits ci-dessus, l'expression du poids statistique d'un état final comprenant n particules, d'énergie totale E, de masse m_i, s'écrit :

$$W = \omega^n \frac{\prod_1^n (2 s_i + 1)}{\prod N_i !} P(T) \rho(n, E, m_i)$$

$$\boxed{\rho\,(n,\ E,\ m_i) = \frac{d}{dE}\int\prod \overrightarrow{dp_i}} \qquad \text{avec} : \begin{cases} \sum_1^n \sqrt{p_i^{\,2} + m_i^{\,2}} = E \\ \overrightarrow{P} - \sum_1^n \overrightarrow{p_i} = 0 \end{cases}$$

C'est la formule fondamentale de la théorie statistique (nous avons pris un système où h = c = 1). La dernière quantité $\rho(n, E, m_i)$ sera appelée "élément d'espace des phases", elle représente la densité des états cinématiques d'un système donné de particules.

La probabilité relative d'un état final s'obtiendra par :

$$P_i = \frac{W_i}{\sum W_i}$$

II - CALCUL DE L'ELEMENT D'ESPACE DES PHASES -

Il est facile de voir que le calcul présenté par Fermi est trop approché, il n'avait comme but que de permettre de vérifier rapidement et en première approximation la validité de la théorie. Une première amélioration est dûe à LEPORE-STUART. Ces auteurs abordent le problème de façon assez rigoureuse et poursuivent le calcul aussi loin que possible ; pour achever la résolution, ils sont obligés de faire des approximations sur l'état cinématique des particules, ce qui est très génant. Un travail ultérieur est dûà FIALHO ; celui-ci aborde le problème comme LEPORE-STUART mais, au lieu de faire des approximations sur l'état cinématique des particules et de résoudre exactement les intégrales, il laisse aux particules leur état relativiste réel, mais emploie une méthode d'approximation pour calculer les intégrales. Le travail de FIALHO est complet mais assez compliqué ; on ne voit pas au point de vue physique à quoi correspond l'approximation employée et on ne connaît pas son ordre de précision. Un physicien, M. BLOCK, a abordé le problème de front, en essayant de résoudre exactement les intégrales. Le calcul n'est possible que dans le cas de deux particules ; pour 3, il semble réalisable mais très

compliqué ; au delà, il devient inextricable. MILBURN a publié en 1955 un article de mise au point sur les études effectuées jusqu'à cette date.

Les travaux russes sur ce problème sont sensiblement parallèles aux précédents et soulèvent les mêmes difficultés. Un important pas en avant a été franchi en 1958 par CERULUS et HAGEDORN (CERN). Ceux-ci proposent une méthode de Monte-Carlo pour résoudre les intégrales. La méthode est correcte et l'ordre de grandeur de l'approximation peut être obtenue. L'étude de cette méthode et celle de l'"approximation gaussienne" que nous avons mise au point sera faite en détail dans les chapitres ultérieurs.

III - LE PROBLEME DES ISOBARES -

En 1954 - 1955, en se basant sur la forte résonance à 180 MeV dans la diffusion pion-nucléon, PEASLEE d'une part, et NIKISHOV d'autre part, proposèrent l'introduction d'une particule composée, intermédiaire, appelée "isobare" et notée N^*. Cette particule excitée se désintégrerait après l'intéraction en un nucléon et un pion. On aurait par exemple la suite de réaction :

$$\pi + N \longrightarrow \pi + N^* \longrightarrow \pi + N + \pi$$

On attribue à l'isobare une masse égale à 1,31 (en unités de masse de nucléon) et un spin isotopique et ordinaire de 3/2.

NIKISHOV introduisait directement cette particule dans la théorie statistique, c'est à dire qu'il en calculait la probabilité par l'élément d'espace des phases correspondant.

STERNHEIMER et LINDENBAUM reprirent cette idée d'isobares ; ils supposèrent l'existence d'une série de niveaux de résonance isobarique et interprétèrent l'intéraction nucléon-nucléon de la façon suivante :

1) Durant l'intéraction, il y a un transfert d'énergie cinétique à la structure interne de l'un ou des deux nucléons. Ceci porte le ou les nu-

cléons à l'un de leurs niveaux isobariques.

2) Un isobare n'a pas d'intéraction avec l'autre nucléon ou l'autre isobare, si l'on excepte le transfert initial d'énergie.

3) La durée de vie des isobares (10^{-23} sec. ou plus) est assez longue devant la durée de l'intéraction (10^{-24} sec.) pour leur permettre de se séparer avant qu'ils ne se désintégrent, si bien que les intéractions dans l'état final entre les produits de désintégration de l'isobare et l'autre nucléon ou l'autre isobare sont négligeables.

4) Pour des énergies de quelques GeV, le niveau isobarique dominant est celui qui correspond à T = 3/2.

Sur ces bases, ils développèrent une théorie complète, en marge de la théorie statistique de FERMI. Celle-ci, malheureusement, est assez compliquée ; aussi comme la plupart des physiciens, nous abandonnerons cette voie d'approche du modèle isobarique.

Comme NIKISHOV l'avait proposé, et comme CERULUS et HAGEDORN l'ont repris, nous conserverons l'hypothèse de l'isobare mais nous l'introduirons directement dans la théorie statistique en le considérant comme une particule nouvelle, indépendante, de masse 1.31, dont nous calculerons la probabilité par l'élément correspondant d'espace des phases. En plus de N^*, nous serons amenés à considérer d'autres particules isobariques comme Λ^*, K^*, ...

V - LES DISTRIBUTIONS DE CHARGE -

Pour une multiplicité donnée, il reste un problème à résoudre : celui de la distribution des charges portées par les différentes particules. Ce problème se résoud par couplage des spins isotopiques à l'aide des coefficients de CLEBSCH-GORDAN ; le calcul est pénible sitôt que le nombre de particules devient important, il ne présente cependant aucune difficulté théorique. Nous nous limiterons à déterminer les multiplicités, sans nous attarder à calculer les distributions de

charges, d'autant plus que, dans une thèse antérieure, ce problème avait déjà été longuement étudié.

VI - MOMENT ANGULAIRE ET DISTRIBUTIONS ANGULAIRES -

Dans tous les calculs faits jusqu'ici sur les intéractions de particules, la conservation du moment angulaire a été négligé. Notons cependant le travail de KOBA et les essais effectués actuellement par des physiciens du CERN.

Une autre question importante est celle de la détermination de la distribution angulaire des particules émises. La théorie que Fermi avait proposée ne peut évidemment pas s'appliquer dans notre cas : les distributions angulaires sont déterminées pour un nombre infini de particules, on ne peut donc appliquer le résultat dans le cas où il y en a au maximum 10. La théorie statistique, telle que nous l'appliquerons, ne suppose rien sur les distributions angulaires.

Nous signalerons les travaux de F. SELLERI (CERN) ; il cherche à déterminer les distributions angulaires par la théorie de champs, en s'aidant de l'hypothèse d'un π° virtuel d'échange.

Dans l'appendice I sera donnée la bibliographie correspondant aux différents problèmes que nous venons d'examiner ainsi qu'aux travaux expérimentaux et aux études quantiques ou semi-quantiques qui ont été faites dans ce domaine.

C H A P I T R E II

METHODES ANTERIEURES DE CALCUL DE L'ELEMENT D'ESPACE DES PHASES

Comme nous l'avons déjà vu, il serait préférable de parler "d'espace des moments" ; cependant, dans la suite du travail, nous emploierons toujours l'expression "espace des phases" pour nous conformer à l'usage et nous le désignerons par ρ.

Dans ce chapitre, nous rappelerons brièvement les diverses méthodes qui ont été employées pour calculer l'espace des phases.

A - CALCUL DE FERMI (Réf. 1) -

Précisons d'abord que les particules sont qualifiées de :

- non relativistes ou classiques (N.R.) quand leur énergie est telle que : $E = 1/2\ mv^2 = p^2/2m$
- ultra ou extrêmement relativistes (E.R.) quand leur énergie est telle que : $E = pc$
- "relativistes" dans tous les cas où aucune des deux approximations précédentes n'est valable : $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$

Dans tous les calculs, nous adopterons un système où $\hbar = c = 1$. FERMI impose au système une seule condition physique : que l'énergie dans l'état final

soit inférieure ou égale à l'énergie dans l'état initial. Il ne fait les calculs que dans les deux cas extrêmes : particules E.R. ou N.R.

1 - Particules E.R. -

$$E_i = p_i \qquad \text{avec} \qquad E \geqslant \sum_1^n E_i = \sum_1^n p_i$$

appelons Q la quantité $\prod_1^n \int \overrightarrow{dp_i}$; $\rho = dQ/dE$

$$Q_{E.R.} = \prod_1^n \int \overrightarrow{dp_i} = (4\pi)^n \prod_1^n \int p_i^2 dp_i$$

$$= (4\pi)^n \int_0^E p_1^2 dp_1 \int_0^{E-p_1} p_2^2 dp_2 \cdots \int_0^{E-\sum_1^{n-1} p_i} p_n^2 dp_n$$

Il trouve finalement :

$$Q_{E.R.} = \frac{2^{3n}\,\pi^n}{(3n)\,!}\, E^{3n}$$

D'où il vient :

$$\boxed{\rho_{E.R.} = \frac{2^{3(n-1)}\,\pi^{n-1}}{(3n-4)\,!}\, E^{3n-4}}$$

La conservation de l'impulsion introduisant une relation entre les p_i, il n'y a plus que $n-1$ particules indépendantes. Fermi tient compte de la conservation de l'impulsion en remplaçant n par $n-1$

2 - Particules N.R. -

FERMI fait, pour ces particules, un calcul analogue, avec cette fois :

$$E_i = 1/2\, m_i v_i^2 = \frac{p_i^2}{2m_i}$$

et obtient :

$$Q_{N.R.} = (2\pi)^{3n/2} \prod_1^n m_i^{3/2}\, \frac{E^{3n/2}}{(\frac{3n}{2})\,!}$$

ce qui donne, avec la même correction $n \longrightarrow n-1$:

$$\rho_{\text{N.R. Fermi}} = (2\pi)^{3/2(n-1)} \frac{E^{3n/2-5/2}}{(3n/2-5/2)!} \prod_{1}^{n-1} m_i^{3/2}$$

Ces deux formules n'ont été rappelées que pour mémoire. Deux objections peuvent être formulées :

- l'énergie cinétique moyenne des particules émises étant de l'ordre des énergies de masse, aucune des deux approximations E.R. ou N.R. ne s'applique.

- La conservation de l'impulsion est exprimée de façon trop grossière.

B - CALCUL EXACT (Réf. 2) -

Ce calcul n'est possible que pour n = 2. Nous expliciterons la démonstration, car le résultat obtenu sera utilisé par la suite.

Soient m_1 et m_2, E_1 et E_2, p_1 et p_2 les masses, les énergies et les impulsions des deux particules.

On ne fait aucune approximation sur l'état cinématique des particules :

$$E_1^2 = p_i^2 + m_i^2$$

- conservation de l'énergie : $E = E_1 + E_2$
- Conservation de l'impulsion : $\vec{p_1} + \vec{p_2} = 0$

c'est à dire :

$$E_1^2 - m_1^2 = E_2^2 - m_2^2$$

Nous disposons donc du système d'équations :

$$\begin{cases} E_1 + E_2 = E \\ E_1^2 - E_2^2 = m_1^2 - m_2^2 \end{cases}$$

d'où l'on tire :

$$\begin{cases} E_1 = \dfrac{E}{2} + \dfrac{m_1^2 - m_2^2}{2E} \\ E_2 = \dfrac{E}{2} - \dfrac{m_1^2 - m_2^2}{2E} \end{cases}$$

Nous avons :

$$\rho_n = \frac{d}{dE} \prod_1^{n-1} \int \overrightarrow{dp_i} \qquad \text{avec } \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = 0$$

D'où :

$$\rho_2 = 4\pi \frac{d}{dE} \int_0^{p_1} p_1^2 \, dp_1 = \frac{4\pi}{3} \frac{d}{dE} p_1^3$$

et :

$$\rho_2 = \frac{4\pi}{3} \frac{d}{dE} \left[E_1^2 - m_1^2 \right]^{3/2}$$

Après avoir remplacé E_1 par sa valeur tirée du système d'équations précédent et avoir effectué la dérivation, nous obtenons :

$$\boxed{\rho_2 = \frac{\pi E^2}{2} \left[1 - \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{E^4} \right] \left[1 - \frac{2(m_1^2 + m_2^2)}{E^2} + \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{E^4} \right]^{1/2}}$$

Si les deux particules en intéraction sont identiques (choc nucléon-nucléon), la formule se simplifie :

$$m_1 = m_2 = m \qquad \rho_2 = \frac{\pi E^2}{2} \left[1 - \frac{4m^2}{E^2} \right]^{1/2}$$

Malheureusement les calculs par cette méthode directe pour $n > 2$ deviennent rapidement inextricables.

C - CALCULS ANALYTIQUES -

Nous commencerons d'abord à mettre le problème en équation et à faire subir à cette équation divers traitements analytiques, nous exposerons ensuite brièvement les voies qui ont été suivies d'abord par LEPORE-STUART, ensuite par FIALHO.

1 - Approche analytique -

La quantité à calculer est :

$$\rho_n = \frac{d}{dE} \int \prod d\vec{p}_i$$

avec :

$$\vec{P} = \sum_1^n \vec{p}_i \qquad \text{et} \qquad E = \sum_1^n \varepsilon_i$$

Pour une bande d'énergie ΔE, nous pouvons écrire, en introduisant la conservation de l'impulsion pour une fonction de Dirac :

$$\Delta E . \rho_n = \int_{E-\Delta E,\ E} \prod_1^n d\vec{p}_i \ \delta \left(\vec{P} - \sum_1^n \vec{p}_i\right)$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\boxed{\rho_n = \int \prod_1^n d\vec{p}_i \ \delta \left(\vec{P} - \sum_1^n \vec{p}_i\right) \ \delta \left(E - \sum_1^n \varepsilon_i\right)}$$

Dans le système du centre de masse : $\vec{P} = 0$

Remplaçons les facteurs δ par leurs transformées de Fourier :

$$\delta \left(\sum_1^n \vec{p}_i \right) = (2\pi)^{-3} \int \exp \left(i \vec{\sigma} \sum_1^n \vec{p}_i\right) d\vec{\sigma}$$

$$= (2\pi)^{-3} \int d\vec{\sigma} \prod_1^n \exp i \ \vec{\sigma} . \vec{p}_i$$

$$\delta \left(E - \sum_1^n \varepsilon_i\right) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp i \lambda \left(E - \sum_1^n \varepsilon_i\right) d\lambda$$

$$= (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \exp i\lambda E \prod_1^n \exp \left(- i\lambda \varepsilon_i\right)$$

D'où il vient :

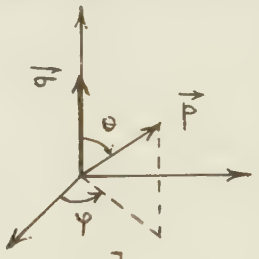
$$\rho_n = (2\pi)^{-4} \int \prod_1^n dp_1 \int \vec{d\sigma} \prod_1^n \exp i\, \vec{\sigma}.\vec{p_i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \exp i\lambda E \prod_1^n \exp(-i\lambda \varepsilon_i)$$

en réarrangeant cette expression, nous pouvons la mettre sous la forme :

$$\boxed{\rho_n = (2\pi)^{-4} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \exp i\lambda E \int \vec{d\sigma} \prod_1^n \int \vec{dp_i} \exp i\left[\vec{\sigma}.\vec{p_i} - \lambda (p_i^2 + m_1^2)^{1/2}\right]} \quad (1)$$

Désignons par I la dernière intégrale vectorielle et décomposons la en 3 facteurs :

$$\begin{cases} dp = p^2\, dp \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \\ \vec{\sigma}.\vec{p} = \sigma p \cos\theta \end{cases}$$



$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} p^2\, dp \exp(-i\lambda Ep) \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \exp\left[i\sigma p \cos\theta\right]$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} p^2 dp \exp(-i\lambda Ep) \left[\frac{i}{\sigma p}(\exp -i\sigma p - \exp i\sigma p)\right]$$

$$= -\frac{2\pi}{i\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} p\, dp \exp i(\sigma p - \lambda Ep)$$

$$= -\frac{2\pi}{\sigma} \frac{d}{d\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \exp i\left[\sigma p - \lambda (p^2 + m^2)^{1/2}\right]$$

Effectuons alors les changements de variables successifs :

$$p = m\, \mathrm{sh}\theta$$

$$\mathrm{ch}\,\varphi_1 = \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 - \sigma^2)} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}\,\varphi_1 = \frac{\sigma}{(\lambda^2 - \sigma^2)}$$

puis $\theta' = \theta - \varphi_i$; et nous obtenons :

$$I = -\frac{2\pi m}{\sigma} \frac{d}{d\sigma} \left\{ \frac{\lambda}{(\lambda^2 - \sigma^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} d\theta'\, \mathrm{ch}\theta' \exp\left[-im(\lambda^2 - \sigma^2)^{1/2}\, \mathrm{ch}\theta'\right] \right\}$$

Après avoir fait le changement de variable $z = m\,(\lambda^2 - \sigma^2)^{1/2}$, il vient :

$$I = 2\pi m^2 \lambda \frac{1}{z} \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{Z}\int_{-\infty}^{+\infty} d\theta\, ch\theta \exp(-i\, z\, ch\theta)\right]$$

En utilisant les propriétés des fonctions de Bessel et de Hankel, les relations entre $H_1^{(1)}$ et $H_1^{(2)}$ et les relations de récurrence entre $H_1^{(2)}$ et $H_2^{(2)}$, il vient finalement :

$$I_i = \frac{2\pi^2 m_i^2 \lambda}{\lambda^2 - \sigma^2} H_2^{(2)}\left[m_i(\lambda^2 - \sigma^2)^{1/2}\right]$$

Valeur que l'on porte dans (1). Nous obtenons ainsi :

$$\rho = \frac{2}{(2\pi)^3}(2\pi^2)^n \prod_1^n m_i^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^n d\lambda\, e^{i\lambda E} \int_0^{\infty} \frac{\sigma^2 d\sigma}{(\lambda^2 - \sigma^2)^n} \prod_1^n H_2^{(2)}\left[m_i(\lambda^2 - \sigma^2)^{1/2}\right]$$

Le calcul analytique ne peut être poussé plus loin sans approximation. Deux voies sont maintenant possibles :

1 - Faire des approximations sur l'état relativiste des particules en les considérant soit comme E.R., soit comme N.R., ce qui permet de résoudre exactement les intégrales.

2 - Laisser les particules exactement relativistes, mais employer une méthode d'approximation pour résoudre les intégrales. Nous allons examiner rapidement ces deux approches.

2 - Calculs de LEPORE-STUART (réf. 3) -

Ces deux auteurs ont choisi la première alternative. Ils supposent les masses de toutes les particules petites devant l'énergie, c'est à dire qu'ils se placent dans l'approximation E.R.

Ceci permet de simplifier l'expression de ρ en utilisant la relation :

$$H_2^{(2)}(z) \simeq \frac{4\,i}{\pi\, z^2}$$

Les intégrales se résolvent alors par la méthode des résidus. Ils trouvent finalement :

$$\rho_{\text{E.R.}_{\text{Lepore-Stuart}}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} \frac{(4n-4)!\ E^{3n-4}}{(2n-1)!\ (2n-2)!\ (3n-4)!}$$

Cette formule, comme celle de Fermi, à laquelle elle peut être comparée, est sujette à l'objection que les particules émises ne sont en fait ni E.R. ni N.R.

3 - Calculs de FIALHO (réf. 4) -

FIALHO laisse aux particules leur état relativiste exact, mais il emploie pour résoudre les intégrales une méthode d'approximation : l'approximation "saddle point". Tous les résultats qu'il donne sont sous forme de tables numériques de fonctions intermédiaires. Nous pouvons faire sur cette méthode les remarques suivantes : au point de vue mathématique l'approximation employée est assez compliquée : il est difficile de se rendre compte à quoi elle correspond physiquement et on ne connaît pas l'erreur commise en l'employant.

C H A P I T R E III

CALCULS UTILISANT LA METHODE DE MONTE-CARLO

Dans ce chapitre, les calculs seront présentés de manière assez détaillée. Dans un premier paragraphe, nous ferons subir à l'expression de l'élément d'espace des phases un certain nombre de transformations analytiques ; puis, dans un deuxième paragraphe, nous poursuivrons le calcul tel que l'a fait HAGEDORN, pour pouvoir ensuite comparer sa formule finale avec celle que nous obtiendrons par la méthode d'approximation qui sera exposée au paragraphe 3.

I - APPROCHE ANALYTIQUE -

Soit donc à calculer la quantité ρ_n donnée par l'expression suivante, établie au chapitre précédent :

$$\rho_n(E,\vec{P}) = \int \overrightarrow{dp_1}, \ldots\ldots \overrightarrow{dp_n}\ \delta\left(\vec{P} - \sum_i^n \vec{p_i}\right)\ \delta\left(E - \sum_i^n \varepsilon_i\right) \qquad (1)$$

avec : $$\varepsilon_i^{\,2} = p_i^{\,2} + m_i^{\,2}$$

Ecrivons : $\vec{p_i} = p_i . \vec{e_i}$ avec $|\vec{e_i}| = 1$, vecteur unité.

$$\overrightarrow{dp_i} = p_i^{\,2}\, dp_i\, \overrightarrow{de_i}$$

$$\rho_n(E,P) = \int dp_i \ldots\ldots dp_n\ p_1^{\,2} \ldots\ p_n^{\,2}\ \overrightarrow{de_1} \ldots\ \overrightarrow{de_n}\ \delta\left(E - \sum_i^n \varepsilon_i\right)\ \delta\left(\vec{P} - \sum_i^n p_i \vec{e_i}\right)$$

Transformons cette intégrale en séparant les intégrations sur p_i et les intégrales angulaires. Il vient :

$$n(E,P) = \int_0^{p_i\,max} \cdots\cdots \int_0 \delta\left(E - \sum_1^n \varepsilon_i\right) \prod_1^n p_i^{\,2} dp_i \int_{espace} \delta\left(\vec{P} - \sum_1^n p_i \vec{e}_i\right) \prod_1^n \vec{de}_i$$

Puisque $p_i^{\,2} + m_i^{\,2} = \varepsilon_i^{\,2}$, nous avons $p_1^{\,2}\, dp_i = \varepsilon_i p_i\, d\,\varepsilon_i$. L'expression précédente peut alors s'écrire :

$$\rho_n(E,P) = \int_{m_i}^{\varepsilon_i\,max} \cdots\cdots \int \delta\left(E - \sum_1^n \varepsilon_i\right) \prod_1^n \varepsilon_i p_i\, d\,\varepsilon_i \int_{espace} \delta\left(\vec{P} - \sum_1^n p_i \vec{e}_i\right) \prod_1^n \vec{de}_i \qquad (2)$$

La dernière intégrale (réf. 5) est proportionnelle à la probabilité $W_n(P,\ p_1\ p_2\ \cdots\cdots\ p_n)$ pour que la résultante $\sum_1^n p_i \vec{e}_i$ se trouve au voisinage $\vec{dP}$ de $\vec{P}$.

$$\int \delta\left(\vec{P} - \sum_1^n p_i \vec{e}_i\right) \prod_1^n \vec{de}_i = K_n W_n(\vec{P},\ p_1 \cdots\cdots\ p_n) \qquad (3)$$

Il nous faut calculer la valeur du coefficient K_n.

Calculons d'abord la quantité :

$$V_n(P, p_1 \cdots\cdots\ p_n) = \int \delta\left(\vec{P} - \sum_1^n p_i \vec{e}_i\right) \prod_1^n \vec{de}_i$$

Remplaçons la fonction δ par sa transformée de Fourier :

$$\delta\left(\vec{P} - \sum_i p_i \vec{e}_i\right) = (2\pi)^{-3} \int \exp\left[i\vec{\lambda}\left(\vec{P} - \sum_1^n p_i \vec{e}_i\right)\right] \vec{d\lambda}$$

ce qui entraîne :

$$V_n(P, p_1 \ldots p_n) = (2\pi)^{-3} \int \exp\left[i\lambda\left(\vec{P} - \sum_1^n p_i \vec{e}_i\right)\right] \vec{d\lambda} \prod_1^n \vec{de}_i$$

$$\exp\left[i\vec{\lambda}\left(\vec{P} - \sum_1^n p_i \vec{e}_i\right)\right] = \exp i\vec{\lambda}.\vec{P} \prod_i \exp\left(-ip_i \vec{\lambda} \cdot \vec{e}_i\right)$$

il vient :

$$V_n = (2\pi)^{-3} \int \vec{d\lambda} \exp\left[i\vec{\lambda}.\vec{P}\right] \prod_1^n \int \vec{de}_i \exp\left[-ip_i\vec{\lambda}.\vec{e}_i\right]$$

Calculons d'abord la deuxième intégrale :

$$I = \int \vec{de} \ \exp\ (-i\vec{\lambda}.\vec{e})$$

$\vec{e}$ est un vecteur unité ; $\vec{de} = 2\pi \sin\theta\, d\theta$ (intégration sur φ effectuée). Choisissons $\vec{\lambda}$ comme axe polaire :

$$\vec{\lambda}.\vec{e} = \lambda \cos\theta$$

On obtient :

$$I = 2\pi \int_0^{\pi} \sin\theta \exp(-ip\lambda)\, d\theta \;\Big/\!\!/\; d\left[\exp(i-p\lambda\cos\theta) = ip\lambda \sin\theta \exp(-ip\lambda\, d\theta)\right] d\theta$$

L'intégrale peut donc s'écrire :

$$I = \frac{2}{ip} \int_{\exp -ip}^{\exp ip} d\left[\exp(-ip\lambda\cos\theta)\right]$$

$$= \frac{2}{ip}\left[\exp(ip\lambda) - \exp(-ip\lambda)\right]$$

$$= \frac{4\pi}{p\lambda} \sin p\lambda$$

valeur que l'on porte dans l'expression de V_n

$$V_n = \frac{(4\pi)^n}{(2\pi)^3} \int \vec{d\lambda} \exp(i\vec{\lambda}.\vec{P}) \prod_1^n \frac{\sin p_i\lambda}{p_i\lambda}$$

$$\vec{d\lambda} = \lambda^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, d\lambda = 2\pi\lambda^2 \sin\theta\, d\theta\, d\lambda$$

$$\vec{\lambda}.\vec{P} = \lambda P \cos\theta$$

$$V_n = \frac{(4\pi)^n}{(2\pi)^3} \cdot 2\pi \int_0^{\infty}\int_0^{\pi} \lambda^2\, d\lambda\, d\theta \sin\theta \exp(i\lambda p\cos\theta) \prod_1^n \frac{\sin p_i\lambda}{p_i\lambda}$$

$$= \frac{(4\pi)^n}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} \lambda^2 \prod_1^n \frac{\mathrm{Sin}\ p_i\lambda}{p_i\lambda} \left[2\pi \int_0^{\pi} \sin\theta \exp(i\lambda P\cos\theta)\, d\theta\right] d\lambda$$

l'intégrale en Θ ressemble à celle déjà calculée, avec λP à la place de $-\lambda p$, elle est donc égale à :

$$\frac{4\pi \sin(-\lambda P)}{-\lambda P} = \frac{4\pi \sin \lambda P}{\lambda P}$$

Nous obtenons :

$$V_n(P, p_i \dots p_n) = \frac{(4\pi)^{n+1}}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \lambda^2 \, d\lambda \, \frac{\sin P\lambda}{P\lambda} \cdot \frac{\sin p_1\lambda}{p_i\lambda} \cdots\cdots \frac{\sin p_n\lambda}{p_n\lambda} \qquad (4)$$

Nous remarquons une symétrie complète entre P et les p_i .

$$W_n(P, p_i \dots p_n) = \frac{1}{K_n} V_n(P, p_1 \cdots\cdots p_n) \qquad (5)$$

Ecrivons la condition de normalisation : $\int W_n(P, p_1, \cdots\cdots p_n) \, \vec{dP} = 1$:

$$4\pi \lim_{P_\odot \to \infty} \int_0^{P_\odot} W_n(P, p_1 \cdots\cdots p_n) P^2 \, dP = 1$$

ce qui nous permet de calculer K_n.

Compte-tenu de (4) et (5), cette expression devient :

$$\frac{(4\pi)^{n+2}}{K_n(2\pi)^3} \int_0^\infty \lambda \prod_1^n \frac{\sin p_i\lambda}{p_i\lambda} \left[\lim_{P_\odot \to \infty} \int_0^{P_\odot} P \sin P\lambda \, dP \right] d\lambda = 1$$

l'intégrale du crochet s'intègre par parties :

$$\frac{(4\pi)^{n+2}}{K_n(2\pi)^3} \int_0^\infty \lambda \prod_1^n \frac{\sin p_i\lambda}{p_i\lambda} \left[\lim_{P_\odot \to \infty} \left(\frac{\sin \lambda P_\odot}{\lambda^2} - \frac{P_\odot}{\lambda} \cos \lambda P_\odot \right) \right] d\lambda = 1$$

Le 2ème terme du crochet annule l'intégrale quand $P_\odot \to \infty$. Il reste donc, puisque la fonction sous le signe intégrale est paire :

$$\frac{(4\pi)^{n+2}}{K_n(2\pi)^3} \cdot 1/2 \int_0^\infty \lambda \prod_1^n \frac{\sin p_i\lambda}{p_i\lambda} \left[\lim_{P_\odot \to \infty} \frac{\sin \lambda P_\odot}{\lambda^2} \right] d\lambda = 1$$

qui peut encore s'écrire :

$$\frac{(4\pi)^{n+2}}{K_n(2\pi)^3} \pi/2 \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_1^n \frac{\sin p_i\lambda}{p_i\lambda} \left[\lim_{P_\odot \to \infty} 1/\pi \, \frac{\sin \lambda P_\odot}{\lambda} \right] d\lambda = 1$$

Nous savons que :

$$\lim_{x \to \infty} \left[1/\pi \ \frac{\sin \lambda x}{\lambda} \right] = \delta(\lambda)$$

et que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ \delta(x) dx = f(0)$$

Nous avons donc :

$$\frac{(4\pi)^{n+2}}{K_n (2\pi)^3} \ \pi/2 \left[\prod_1^n \frac{\sin p_i \lambda}{p_i \lambda} \right]_{\lambda=0} = 1$$

Le crochet étant égal à 1, nous trouvons :

$$K_n = \frac{(4\pi)^{n+2}}{2^4 \pi^2} = \frac{(4\pi)^{n+2}}{(4\pi)^2}$$

ce qui donne finalement :

$$\boxed{K_n = (4\pi)^n} \qquad (6)$$

Portons la valeur de K_n ainsi trouvée dans (3) et (5) ; en tenant compte de (4) nous obtenons :

$$W_n(P, p_1 \ldots\ldots p_n) = \frac{1}{(4\pi)^n} \int \delta \left(\vec{P} - \sum_1^n p_i \vec{e}_i \right) \prod_1^n \overrightarrow{de_i} \qquad (7)$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \lambda^2 \, d\lambda \ \frac{\sin P\lambda}{P\lambda} \prod_1^n \frac{\sin p_i \lambda}{p_i \lambda} \qquad (8)$$

II - CALCULS DE CERULUS ET HAGEDORN - (Réf. 5) -

CERULUS et HAGEDORN continuent le calcul analytique de W_n à partir de la formule (8). Il nous a paru utile d'expliciter leur calcul.

Dans le C.M.S., où $\vec{P} = 0$, W_n s'écrit :

$$W_n(0, p_1 \ldots p_n) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \lambda^2 \, d\lambda \prod_1^n \frac{\sin p_i \lambda}{p_i \lambda}$$

Remplaçons chaque $\sin p_i\lambda$ par $\frac{1}{2_i}\left[\exp(ip_i\lambda) - \exp(-ip_i\lambda)\right]$. De plus, l'intégrant étant une fonction paire, nous pouvons écrire :

$$\int_0^{\infty} = 1/2 \int_{-\infty}^{+\infty}$$

ce qui donne :

$$W_n(0, p_1 \dots p_n) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\prod p_i} \frac{1}{(2_i)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^{n-2}} \prod^{n} \left[\exp(ip_i\lambda) - \exp(-ip_i\lambda)\right]$$

Le produit dans l'intégrant s'écrit :

$$\left[\exp(ip_1\lambda) - \exp(-ip_1\lambda)\right]\left[\exp(ip_2\lambda) - \exp(-ip_2\lambda)\right] \dots \left[(\exp(ip_n\lambda) - \exp(-ip_n\lambda)\right]$$

Une fois tous les produits effectués, il y aura 2^n termes.

Explicitons par exemple le développement pour n = 3, en ne mettant que P_i au lieu de $ip_i\lambda$; on trouve :

$$e^{p_1 \; p_2 + p_3} - e^{-p_1 + p_2 - p_3} - e^{p_1 - p_2 + p_3} + e^{p_1 - p_2 - p_3} - e^{-p_1 + p_2 + p_3}$$

$$+ e^{-p_1 + p_2 - p_3} + e^{-p_1 - p_2 + p_3} - e^{-p_1 - p_2 - p_3}$$

Nous avons bien $2^3 = 8$ termes.

Soit σ_i le signe affecté à p_i. Nous remarquons que le signe de chaque exponentielle est le produit des σ_i. Nous pouvons donc écrire cette quantité sous la forme :

$$\sum_{\sigma} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \exp\left(\sum_i \sigma_i p_i\right)$$

La première somme, $\sum_{\sigma}$, représentant toutes les combinaisons possibles des σ_i.

L'intégrale s'écrit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^{n-2}} \sum_{\sigma} \sigma_1 \dots\dots\dots \sigma_n \exp\left[i\lambda \sum_i \sigma_i p_i\right]$$

sont exclues de la sommation les combinaisons pour lesquelles $\sum \sigma_i p_i < 0$.

Cette intégrale se résoud par la méthode des résidus. Ecrivons le développement de l'exponentielle :

$$\exp i\lambda \sum_i \sigma_i p_i = 1 + \frac{i\lambda \sum \sigma_i p_i}{1} + \ldots\ldots\ldots + \frac{(i\lambda \sum \sigma_i p_i)^n}{n\,!} + \ldots\ldots$$

Divisons ce développement par λ^{n+2} et prenons le résidu à l'infini ($\lambda = 0$) qui est le coefficient de $1/\lambda$. Ce coefficient est celui du terme en $(n-3)$. L'intégrale est donc égale à :

$$\frac{2i\pi}{(n-3)\,!} \sum_\sigma \sigma_i \ldots\ldots\ldots \sigma_n \, (i \sum_i \sigma_i p_i)^{n-3}$$

Portons ce résultat dans l'expression de W_n, il vient :

$$W_n(0, p_1 \ldots\ldots p_n) = -\frac{1}{\pi\, 2^{n+1}(n-3)!} \frac{1}{\prod_1 p_i} \left[\sum_\sigma \sigma_1 \ldots\ldots \sigma_n (\sum_i \sigma_i p_i)^{n-3} \right]_{\sum \sigma_i p_i > 0}$$

Chaque combinaison de signes a un inverse. Sur les deux, une correspond à $\sum \sigma_i p_i < 0$, qu'il faut éliminer. La somme porte donc sur la moitié seulement de toutes les combinaisons de signes. On peut fixer $\sigma_1 = +1$ et faire varier les autres : on n'aura ainsi que la moitié de toutes les combinaisons et aucune ne sera l'inverse de l'autre. Parmi cette moitié, certaines correspondront à $\sum \sigma_i p_i < 0$ (le fait de poser $\sigma_1 = +1$ n'élimine pas ces combinaisons) ; il suffira de les retrancher (c'est à dire ajouter l'inverse) au lieu de les ajouter.

Ceci s'exprime en écrivant :

$$W_n(0, p_i \ldots p_n) = -\frac{1}{(n-3)\,!\; 2^{n+1}\,\pi} \cdot \frac{1}{\prod_1 p_i} \left[\sum_{\sigma_1 = +1} \sigma_1 \ldots\ldots \sigma_n (\mathrm{sg} \sum \sigma_i p_i)(\sum \sigma_i p_i)^{n-3} \right]$$

Nous avons ainsi la forme analytique exacte de la probabilité $W_n(0, p_i \ldots\ldots p_n)$. Dans le C.M.S. $\sum \vec{p_i} = 0$; pour que cette condition puisse être satisfaite, aucun des p_i ne doit être supérieur à la somme de tous les autres. Si chaque p_i est inférieur à la somme de tous les autres, il sera toujours possible de trouver des angles tels que : $\sum \vec{p_i} = 0$.

Il faut donc :

$$p_j < \sum_{i \neq j} p_i$$

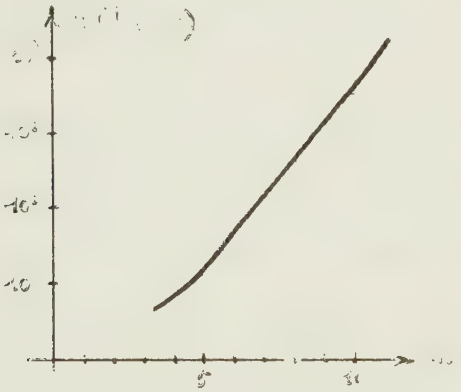
c'est à dire :

$$\boxed{2\, p_j < \sum p_i}$$

On peut vérifier analytiquement ou numériquement que l'on a :

$$W_n(0, p_i \ldots\ldots p_n) = 0 \qquad \text{si} \qquad 2\, p_j - \sum p_i > 0$$

La méthode de CERULUS et HAGEDORN est donc excellente théoriquement tant aux points de vue physique que mathématique. Elle a un gros inconvénient pratique : elle nécessite des calculs extrêmement longs, même avec une calculatrice électronique, ceci à cause de la combinaison de signe $\sum \sigma_i \ldots\ldots \sigma_n$.



Nous reproduisons un graphique donnant en fonction du nombre de particules le nombre d'heures de calcul sur un ordinateur IBM 650 pour avoir une précision de 8 % environ (réf. 6)

Il était donc extrêmement utile de trouver une méthode d'approximation qui réponde aux deux conditions :

- être suffisamment précise physiquement et mathématiquement,
- nécessiter des calculs d'une durée raisonnable.

C'est ce que nous avons essayé de faire en mettant au point sur les conseils des Drs HAGEDORN et ERICSON (réf. 6), une méthode d'approximation que nous appellerons "l'approximation gaussienne" (réf. 7).

III - L'APPROXIMATION GAUSSIENNE -

Nous avons donc à calculer :

$$P = \int_{m_i}^{\varepsilon_i \max} \cdots \int \delta\left(E - \sum_i^n \varepsilon_i p_i\right) \prod_i^n \varepsilon_i p_i \, d\varepsilon_i \int \delta\left(\vec{P} - \sum_i^n p_i \vec{e}_i\right) \prod_i^n \vec{de}_i \qquad (2)$$

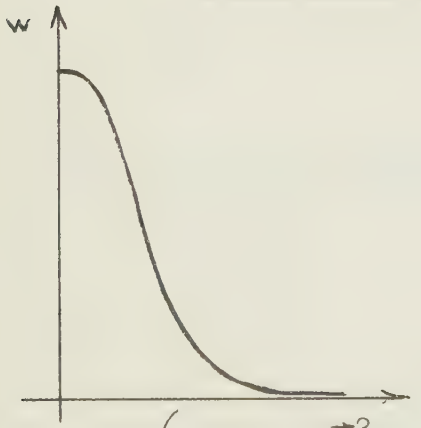
avec :

$$\int \delta\left(\vec{P} - \sum_i^n p_i \vec{e}_i\right) \prod_i^n \vec{de}_i = (4\pi)^n \, W_n(P, p_1 \ldots\ldots p_n) \qquad (7)$$

$W_n(P, p_1 \ldots\ldots p_n)$ étant la probabilité pour que la résultante $\sum_i^n \vec{p}_i$ se trouve dans le voisinage $\vec{dP}$ de $\vec{P}$. L'inconvénient de la méthode d'HAGEDORN venait de ce que cette probabilité avait une expression analytique trop compliquée. Notre approximation consistera donc a en trouver une forme approchée.

Nous supposerons que la probabilité pour que la résultante $\sum_i^n \vec{p}_i$ se trouve au voisinage de $\vec{P}$ a une forme gaussienne (cette idée est dûe à T. ERICSON). Nous poserons donc :

$$\boxed{W(P, p_1 \ldots\ldots p_n) = K \exp\left(-\frac{\vec{P}^2}{2\sigma^2}\right)} \qquad (10)$$



La variance σ^2 étant fonction des p_i, k étant un coefficient de normalisation qu'il faudra calculer.

Pour obtenir K, écrivons la condition de normalisation :

$$K \int \exp\left(-\frac{\vec{P}^2}{2\sigma^2}\right) \vec{dP} = 4\pi K \int_0^\infty P^2 \, e^{-\frac{P^2}{2\sigma^2}} \, dP = 1$$

Nous savons, d'après le calcul symbolique, que :

$$\int_0^\infty t^n \, e^{-pt} \, dt = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

Le changement de variable $t = P^2$ fournit :

$$2\int_0^{\infty} P^{2n+1}\, e^{-pP^2}\, dP = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

Dans notre cas, $2n+1=3$ ce qui donne : $n = 1/2$. D'où :

$$\int_0^{\infty} P^2 e^{-pP^2}\, dP = \frac{1/2\,!}{2\,p^{3/2}}$$

Nous savons que $n\,! = \Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$.

Par suite :

$$1/2\,! = 1/2\,\Gamma(1/2) = 1/2\,\sqrt{\pi}$$

Il vient alors :

$$\int_0^{\infty} P^2 \exp -pP^2\, dP = \frac{\sqrt{\pi}}{4\,p\,3/2}$$

Ici : $p = (2\sigma^2)^{-1}$

Donc :

$$\int_0^{\infty} P^2 \exp \frac{P^2}{2\sigma^2}\, dP = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\,(2\sigma^2)^{3/2}$$

$$4\pi K \int_0^{\infty} P^2 \exp -\frac{P^2}{2\sigma^2}\, dP = \frac{4\pi K\sqrt{\pi}}{4}\,(2\sigma^2)^{3/2} = 1$$

Nous en tirons :

$$K = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}}$$

La probabilité est donc :

$$W(P, p_1 \ldots\ldots p_n) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{P^2}{2\sigma^2}\right) \qquad (11)$$

Il faut maintenant exprimer la variance σ^2 en fonction des p_i.

Nous avons :

$$\sigma^2 = \langle \vec{P}^2 \rangle$$

Nous poserons :

$$\boxed{\sigma^2 = 1/3 \sum_1^n \langle p_i^2 \rangle} \qquad (12)$$

Nous ne justifions pas cette formule de façon rigoureuse et la considérons comme légitimée par les résultats auxquels elle conduit.

Dans le C.M.S., il faut prendre la valeur de la probabilité W_n définie par (11) pour $\vec{P} = 0$. Nous avons donc :

$$W(0, p_1 \ldots\ldots p_n) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}}$$

Valeur que l'on porte dans (7) puis dans (2)

Nous obtenons ainsi :

$$\rho = (4\pi)^n \int_{m_i}^{\varepsilon_i \max} \ldots\ldots \delta(E - \sum_1^n \varepsilon_i) \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \prod_1^n \varepsilon_i p_i \, d\varepsilon_i$$

Remplaçons σ^2 par sa valeur et sortons-le de l'intégrale, il vient :

$$\rho = (4\pi)^n \left[\frac{3}{2\pi}\right]^{3/2} \frac{1}{\sum_1^n \langle p_i^2 \rangle} \int_{m_i}^{\varepsilon_i \max} \ldots\ldots \delta(E - \sum_1^n \varepsilon_i) \prod_1^n \varepsilon_i p_i \, d\varepsilon_i \qquad (13)$$

avec :

$$p_i^2 = \varepsilon_i^2 - m_i^2$$

Calculons l'intégrale multiple que nous appelerons I.

$$I = \int_{m_1}^{\varepsilon_1 \max} d\varepsilon_1 \int_{m_2}^{\varepsilon_2 \max} d\varepsilon_2 \ldots\ldots \int_{m_n}^{\varepsilon_n \max} d\varepsilon_n \; \delta(E - \sum_1^n \varepsilon_i) \prod_1^n \varepsilon_i p_i$$

soit :

$$\begin{cases} t_i & \text{l'énergie cinétique } t_i = \varepsilon_i - m_i \\ T & \text{l'énergie cinétique totale } T = \sum_1^n t_i \\ M & \text{l'énergie de masse totale } M = \sum_1^n m_i \ ; \ E - M = T \end{cases}$$

faisons le changement de variables $\varepsilon_i \longrightarrow t_i$

$$\delta(E - \sum_1^n \varepsilon_i) = \delta(T + M - \sum_1^n t_i + m_i) = \delta(T + M - \sum_1^n m_i - \sum_1^n t_i)$$
$$= \delta(T - \sum_1^n t_i)$$

Nous obtenons :

$$I = \int_0^{t_1 \max} dt_1 \int_0^{t_2 \max} dt_2 \cdots\cdots \int_0^{t_n \max} dt_n \prod_1^n \varepsilon_i p_i \quad \delta(T - \sum_1^n t_i)$$

Nous laisserons tout au long du calcul l'intégrant sous la forme simple $\prod_1^n \varepsilon_i p_i$ sans l'exprimer explicitement en fonction des variables successives, afin de ne pas alourdir inutilement le calcul.

Faisons maintenant le dernier changement de variables défini par :

$$\begin{cases} t_1 = T_1 \\ t_2 = T_2 - T_1 \\ \cdots\cdots \\ t_i = T_i - T_{i-1} \\ \cdots\cdots \\ t_n = T_n - T_{n-1} \end{cases}$$

Nous pouvons vérifier que le jacobien des anciennes variables par rapport aux nouvelles est égal à 1, et que $T_n = \sum t_i = T$

Nous obtenons ainsi l'intégrale I sous la forme :

$$I = \int_0^{T_1 \max} dT_1 \int_{T_1}^{T_2 \max} dT_2 \cdots\cdots \int_{T_{n-2}}^{T_{n-1} \max} dt_{n-1} \int_{T_{n-1}}^{T_n \max} dT_n \ \delta(T - T_n) \prod_1^n \varepsilon_i p_i$$

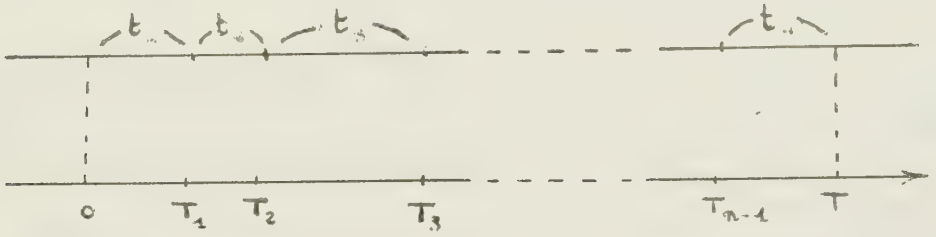
Pour effectuer la dernière intégration, utilisons la propriété de la fonction de Dirac :

$$\int \delta (x - a)\, f(x)\, dx = f(a)$$

Il vient :

$$I = \int_0^{T_1 \max} dT_1 \ldots\ldots\ldots \int_{T_{n-2}}^{T_{n-1} \max} dT_{n-1} \prod_1^n \varepsilon_i p_i$$

où dans l'intégrant T a été changé en T_n, mais ceci n'entraîne pas de modification de la fonction du fait que $T = T_n$.



La borne supérieure pour T_{n-1} est T ; nous avons donc $T_{n-1}\max = T$. POur les autres bornes, nous prendrons la même limite $T_i \max = T$

$$I = \int_0^T dT_1 \int_{T_1}^T dT_2 \ldots\ldots \int_{T_{n-2}}^{T_{n-1}} dT_{n-1} \prod_i^n \varepsilon_i p_i \qquad (15)$$

Pour calculer cette intégrale, nous utiliserons la formule moyenne :

$$\int_0^a f(x)dx = a\, \overline{f(x)}$$

$\overline{f(x)}$ étant la valeur moyenne de f(x) sur l'intervalle (0, a). Faisons une extension pour une intégrale multiple

$$\int \ldots\ldots \int f(x, y, z, \ldots)\, dx\, dy\, dz \ldots\ldots = V\, \overline{f(x, y, z, \ldots\ldots)}$$

V étant le domaine d'intégration, $\overline{f(x, y, z, \ldots)}$ étant la valeur moyenne de la fonction sur ce domaine. Il faut donc calculer deux quantités :

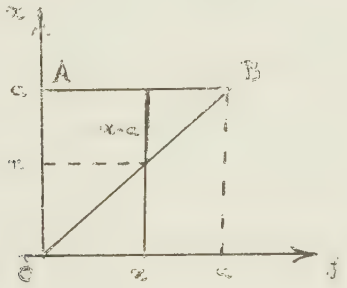
- le volume d'intégration V,
- la valeur moyenne de la fonction

Le volume d'intégration d'obtient en calculant l'intégrale où l'on a fait f = 1.

Pour un problème à une dimension, nous avons :

$$\int_0^a dx = a$$

Pour un problème à deux dimensions, nous avons :

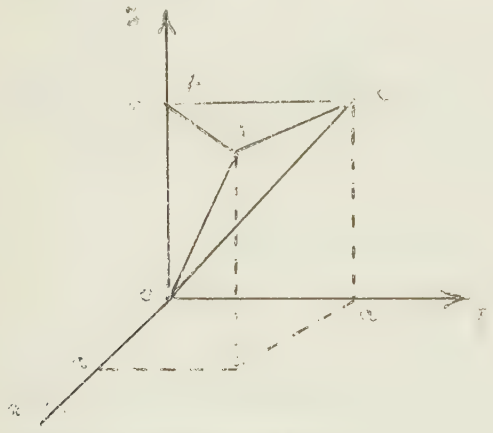


$$\int_0^a dx \int_x^a dy = \int_0^a dx(a - x)$$

$$= a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$

C'est la surface du triangle OAB.

Pour un problème à trois dimensions nous avons :



$$\int_0^a dx \int_x^a dy \int_y^a dz = \int_0^a dx \int_x^a dy(x - y)$$

$$= \int_0^a dx \left[a(a-x) - \frac{a^2}{2} - \frac{x}{2} \right.$$

$$= \frac{a^3}{2 \cdot 3}$$

C'est le volume OABC.

Pour un problème à n dimensions, nous aurions : $\frac{a^n}{n!}$.

Le volume d'intégration que l'on cherche est donné par :

$$\int_0^T dT_1 \int_{T_1}^{T_2} dT_2 \ldots \int_{T_{n-1}}^{T} dT_{n-1}$$

Il est donc égal à :

$$\boxed{V = \frac{T^{n-1}}{(n-1)\,!}} \tag{16}$$

Portons (16) dans (15), nous obtenons :

$$I = \left\langle \prod_{1}^{n} \varepsilon_i p_i \right\rangle \quad \frac{T^{n-1}}{(n-1)!} \tag{17}$$

Portons (17) dans (14) et (13), nous obtenons :

$$\boxed{\rho_n = (4\pi)^n \left[\frac{3}{2\pi}\right]^{3/2} \cdot \frac{T^{n-1}}{(n-1)\,!} \; \frac{\left\langle \prod_{1}^{n} \varepsilon_i p_i \right\rangle}{\left[\sum_{1}^{n} \langle p_i^{\,2} \rangle\right]^{3/2}}} \tag{18}$$

c'est l'expression algébrique finale que nous obtenons pour l'élément d'espace des phases par l'approximation gaussienne.

Comment continuer des calculs numériques avec cette formule ? Les trois premiers termes ne présentent pas de difficulté. Pour calculer le dernier terme, nous emploierons une méthode de Monte-Carlo. Nous opérerons ainsi : dans l'intervalle $[0, T]$, $(n-1)$ nombres seront tirés au hasard, la densité de probabilité étant homogène, ceci revient à faire l'hypothèse physique suivante : nous supposons que l'énergie cinétique se répartit entre toutes les particules avec une égale probabilité.

Les $(n-1)$ nombres ainsi obtenus sont classés par ordre de grandeur. Ce sont : T_1, T_2, ... T_{n-1}. Par soustractions successives $T_i - T_{i-1}$, nous obtenons les énergies cinétiques des n particules

$$\begin{cases} t_1 = T_1 \\ t_2 = T_2 - T_1 \\ \vdots \\ t_n = T - T_{n-1} \end{cases}$$

Nous avons ensuite à calculer l'énergie totale de chaque particule :

$$\varepsilon_i = t_i + m_i$$

- le carré de l'impulsion : $p_i^2 = \varepsilon_i^2 - m_i^2$
- l'impulsion : $p_i = (\varepsilon_i^2 - m_1^2)^{1/2}$
- les n produits $\varepsilon_i p_i$
- le produit cumulé : $\prod_i \varepsilon_i p_i$

Après tirage, nous avons ainsi :

- les n nombres $p_1^2 \; p_2^2 \; \ldots\ldots\ldots \; p_n^2$
- le produit $\prod_i \varepsilon_i p_i$

N tirages sont effectués. Chaque tirage aura l'indice j. Les valeurs moyennes cherchées seront données par :

$$\left\langle \prod_i \varepsilon_i p_i \right\rangle = 1/N \sum_j \left(\prod_i \varepsilon_i p_i \right)_j$$

$$\sum_i \left\langle p_i^2 \right\rangle = \sum_i \left[1/N \sum_j \left(p_i^2 \right)_j \right]$$

La dernière expression peut être transformée :

$$\sum_i \left\langle p_i^2 \right\rangle = 1/N \sum_j \left(p_1^2 \right)_j + \ldots\ldots\ldots + 1/N \sum_j \left(p_n^2 \right)_j$$

$$= 1/N \left[\sum_j \left(p_1^2 \right)_j + \ldots\ldots\ldots + \sum_j \left(p_n^2 \right)_j \right]$$

$$= 1/N \left[\sum_j \left(p_1^2 + p_2^2 + \ldots\ldots + p_2^2 \right)_j \right]$$

$$= 1/N \sum_j \left[\sum_i p_1^2 \right]_j = \left\langle \sum_i p_1^2 \right\rangle$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\sum_i \left\langle p_1^2 \right\rangle = \left\langle \sum_i p_1^2 \right\rangle$$

l'expression de Γ_n s'écrit alors :

$$\rho_n = (4\pi)^n \left[\frac{3}{2\pi}\right]^{3/2} \frac{T^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\left\langle \prod_i^n \varepsilon_i p_i \right\rangle}{\left\langle \sum_i^n p_i^2 \right\rangle^{3/2}} \qquad (19)$$

Chacun des N tirages fournira une valeur de $\prod_i \varepsilon_i p_i$ et une valeur de $\sum_i p_i^2$. Nous calculerons les moyennes de ces N valeurs et nous les porterons dans l'expression de ρ_n.

C H A P I T R E IV

REALISATION PRATIQUE DES CALCULS

I - EMPLOI DE LA METHODE DE MONTE-CARLO - LE PROBLEME DU TIRAGE -

On rencontre, dans l'utilisation de la méthode de Monte-Carlo, deux difficultés techniques :

- le tirage des paramètres : un tirage manuel ou mécanique est fastidieux et toujours plus ou moins douteux, quelque soit la technique employée (jetons, roulette, tambours, ...),

- dans le cas où un ordinateur électronique est employé pour faire les calculs, l'introduction des paramètres tirés extérieurement représente une perte de temps et surtout une source d'inertie très grande.

Il est plus sûr et plus commode d'étudier une génération arithmétique de nombres au hasard (ou, plus exactement, de nombres "pseudo au hasard") avec une répartition uniforme entre 0 et 1. Pour tirer une valeur T_i dans l'intervalle 0 - T, il suffira de prendre un de ces nombres au hasard et de le multiplier par la borne T. Le tirage pourra ainsi être fait par l'ordinateur même sur lequel sont effectués les calculs.

Nous donnerons dans l'appendice II quelques indications sur la méthode de génération de nombres au hasard utilisée.

II - ORGANIGRAMME DES CALCULS -

L'élément d'espace des phases est donné par la formule (III - 19)

$$\rho_n = (4\pi)^n \left[\frac{3}{2\pi}\right]^{3/2} \frac{T_{n-1}}{(n-1)!} \frac{\left\langle \prod_1^n \varepsilon_i p_i \right\rangle}{\left\langle \sum_1^n p_i^2 \right\rangle^{3/2}}$$

Remarquons que cette quantité a les dimensions d'une énergie à la puissance 3n-4. Nous l'écrirons sous la forme : $\rho_n = A_n S_n$, avec :

$$A_n = (4\pi)^n \left[\frac{3}{2\pi}\right]^{3/2} \frac{T^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$S_n = \frac{\left\langle \prod_1^n \varepsilon_i p_i \right\rangle}{\left\langle \sum_1^n p_i^2 \right\rangle^{3/2}}$$

Le calcul du coefficient A_n ne présente pas de difficulté. Nous nous occuperons plus spécialement du terme S_n. Dans la suite de ce chapitre, nous omettrons l'indice n. Le calcul de S se fera par la méthode de Monte-Carlo exposée au chapitre III.

Nous ferons N tirages groupés en λ séries de $N_o = 10$ tirages. Chaque série de 10 tirages aura le numéro μ : $1 \leqslant \mu \leqslant \lambda$.

Nous calculerons chaque $S\mu$, valeur de S pour chaque série de 10 tirages et $\overline{S\mu}$, valeur donnée pour les 10μ premiers tirages.

Posons :

$$S = \frac{P}{Q^{3/2}}$$

Nous avons :

$$\overline{Q_\mu} = 1/\mu \sum Q_\mu$$

Par exemple :

$$\overline{Q_2} = 1/20 \sum_{1}^{20} \left[\sum_{1}^{n} p_i^2 \right] = 1/2 \left[1/10 \sum_{1}^{10} \left(\sum_{1}^{n} p_i^2 \right) + 1/10 \sum_{11}^{20} \left(\sum p_i^2 \right) \right]$$

$$= 1/2 \left[Q_1 + Q_2 \right]$$

De même :

$$\overline{P_\mu} = 1/\mu \sum P_\mu$$

Mais nous avons : $\overline{S_\mu} \neq 1/\mu \sum S_\mu$, à cause de la puissance 3/2 de Q. Ceci compliquera quelque peu le programme. Un tirage donnera donc une valeur de P et une valeur de Q. Nous recommençons 10 fois le calcul, nous faisons la moyenne des 10 valeurs de P et de Q ainsi obtenues : nous obtenons P_μ et Q_μ. Nous pouvons alors calculer $S_\mu = \frac{P_\mu}{Q_\mu^{3/2}}$. Nous calculons ensuite les quantité $\overline{P_\mu}$ et $\overline{Q_\mu}$: moyenne des μ valeurs de P et de Q obtenues jusque là.

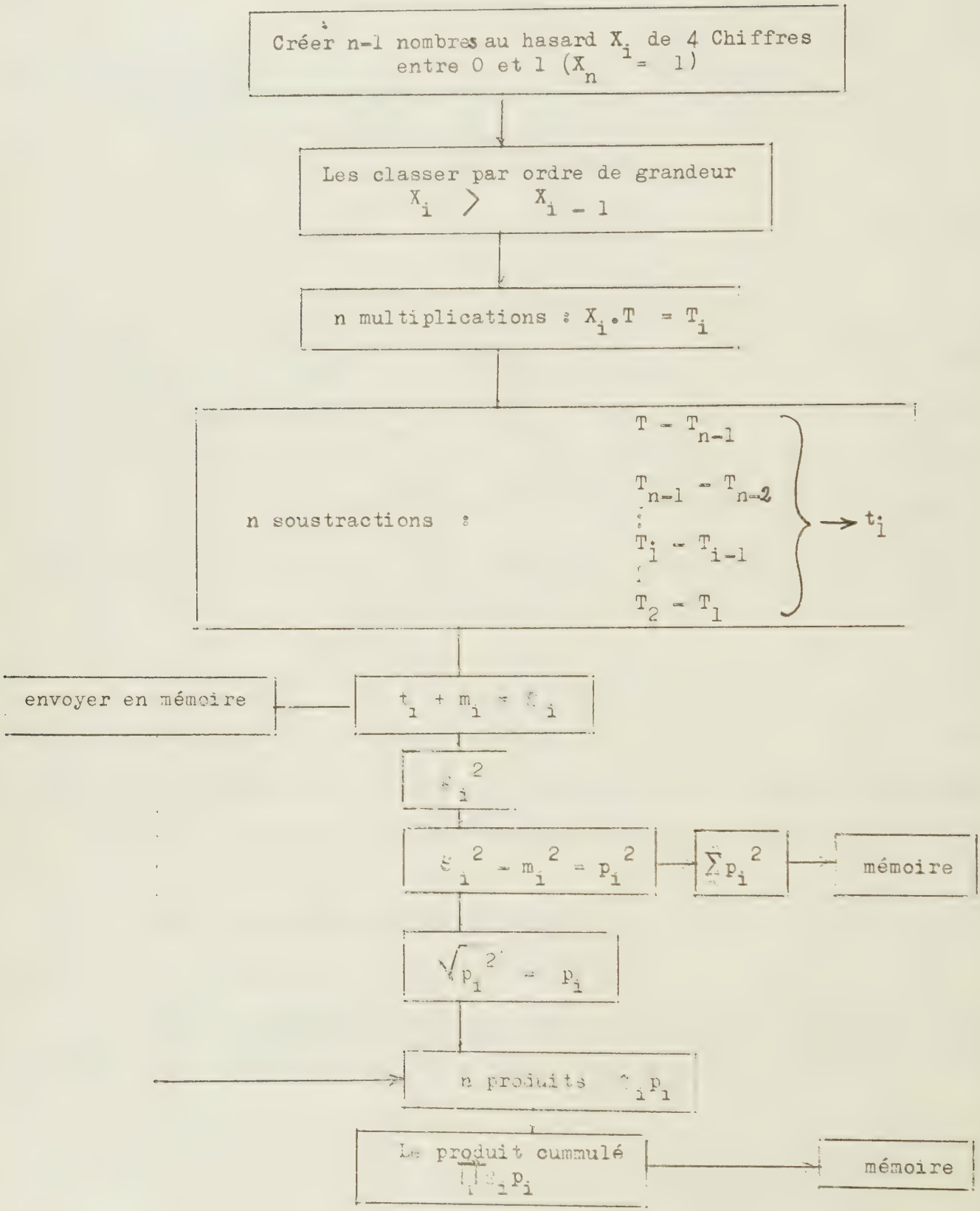
$$\overline{S_\mu} = \frac{\overline{P_\mu}}{\overline{Q_\mu}^{3/2}}$$

Nous recommençons λ fois cet ensemble de calcul. Pour chaque cas (n donné), nous avons besoin comme valeurs numériques de :

- T : énergie cinétique totale
- n : masses m_i

L'organigramme des calculs se présente de la façon suivante :

1 - Calculs pour 1 tirage

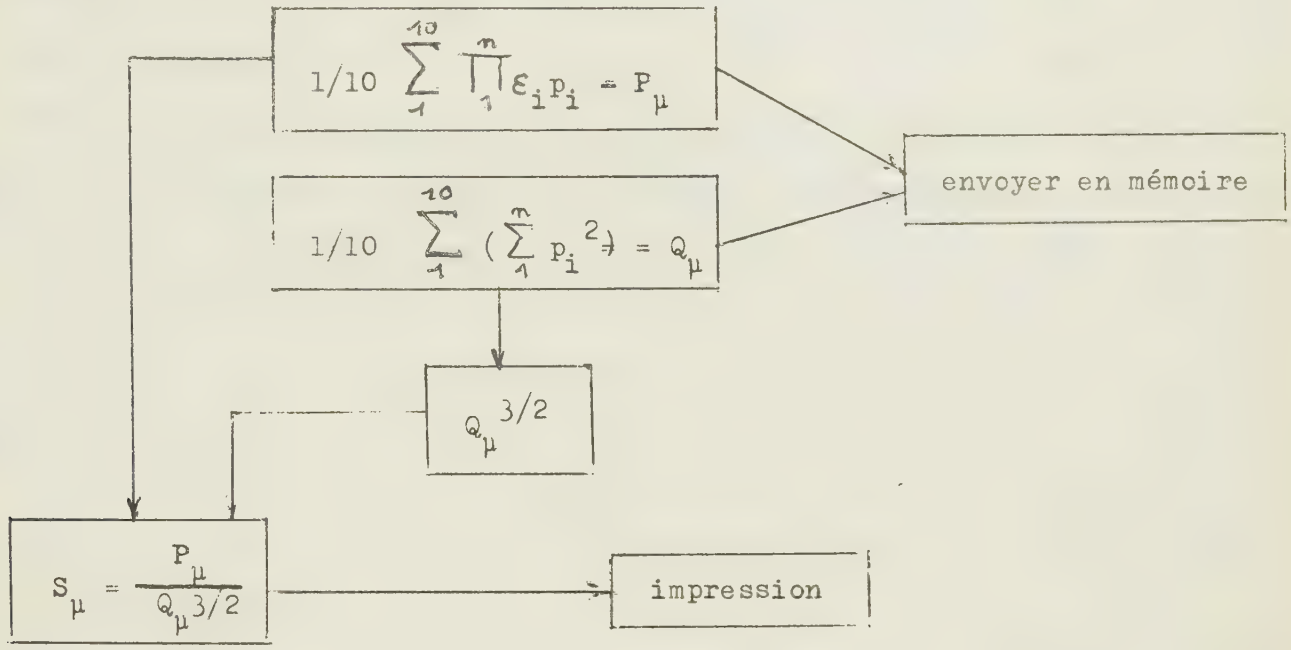


Recommencer $N_o = 10$ fois ces mêmes calculs.

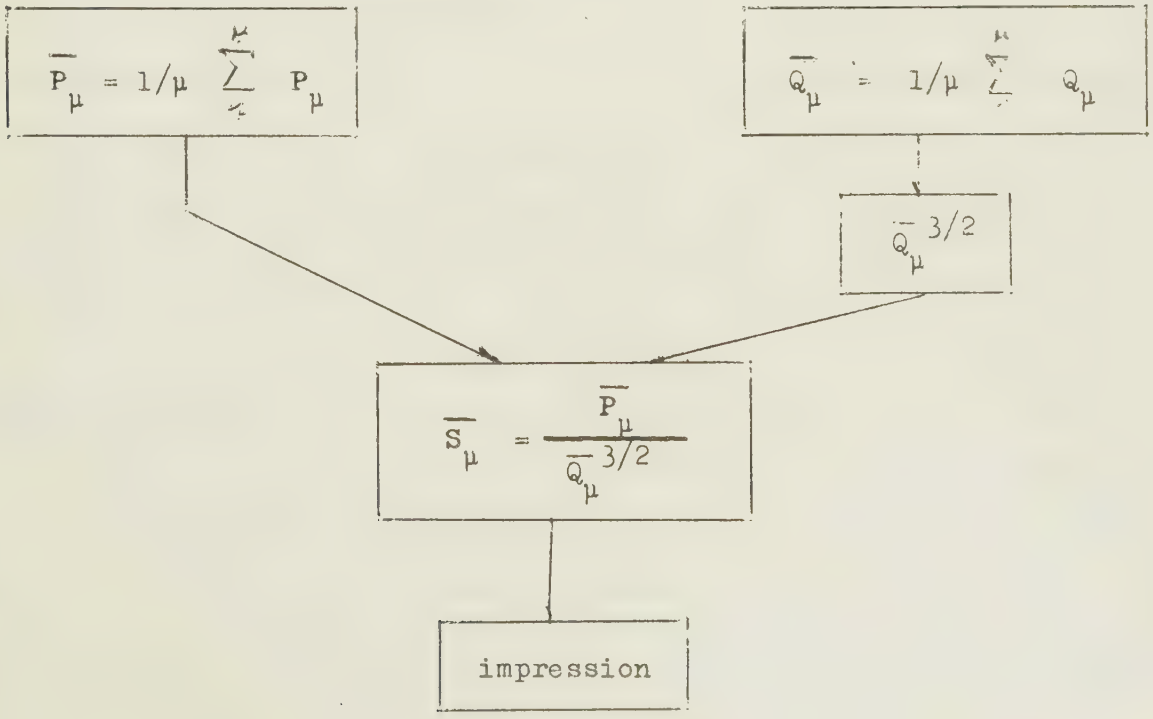
2 - Après une série de 10 tirages -

Nous avons en mémoire : { 10 valeurs de $\prod_{1}^{n} \varepsilon_i p_i$; 10 valeurs de $\sum_{1}^{n} p_i^2$

Nous faisons les moyennes :



De plus, on fait les moyennes cumulées :



III - ESTIMATION DE L'ERREUR -

Pour chaque réaction, les valeurs de S_μ et $\overline{S_\mu}$ peuvent être représentées sous forme d'histogramme. Le calcul analytique de l'erreur serait compliqué, parce que d'une part $S_\mu \neq 1/\mu \sum S_\mu$, et que, d'autre part, il nous faudrait l'expression de l'erreur "pas à pas" c'est à dire pour chaque valeur de μ. Ceci n'a pas été fait ; nous nous sommes contentés de déterminer graphiquement le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une convergence acceptable (erreur < 5 % environ). Les essais présentés au chapitre V ont été faits avec 300 tirages au maximum. Avec ce nombre les fluctuations statistiques sont encore trop importantes (cf fig. 1 à 7). Lors de l'utilisation de la méthode (chapitre VI), 500 tirages furent effectués. Dans ce cas, la convergence est acceptable.

IV - LES SPECTRES -

Les spectres en énergie et en impulsion pour chaque particule pourraient être obtenus de la façon suivante : on choisit des bandes d'énergie ou d'impulsion et on compte le nombre de valeurs qui tombent dans chaque bande. Les nombres trouvés sont multipliés par le poids statistique de la réaction considérée et on fait la somme des résultats obtenus pour toutes les particules ou pour une catégorie de particules. On obtient des spectres sous forme d'histogramme. Ceux-ci, provenant directement des hypothèses sur lesquelles est basé le tirage, ne nous apportent rien de plus au point de vue physique ; nous ne nous sommes donc pas intéressés à cette question.

C H A P I T R E V

TEST DE VALIDITE DE L'APPROXIMATION GAUSSIENNE

Afin de vérifier la validité de la méthode, nous avons comparé les valeurs trouvées par HAGEDORN et celles données par l'approximation gaussienne dans différents cas particuliers.

Nous avons utilisé deux séries de résultats :

- à 2.75 GeV (réf. 8)
- à 25 GeV (réf. 9)

Nous avons :

$$\rho_n = A_n S_n$$

Le coefficient A_n se calcule facilement ; pour chaque énergie, il faut en faire un tableau en fonction de n.

I - ESSAIS A 2.75 GeV -

Nous adopterons le système d'unités dans lequel $h = c = M = 1$; M étant la masse du nucléon. Toutes les masses et les énergies seront donc exprimées en énergie de masse de nucléon. Dans ce système, la masse du pion est 0.1471.

Nous considérerons les collisions nucléon-nucléon. L'énergie totale E des deux nucléons dans le C.M.S. sera donnée par (cf. Appendice III) :

$$E = (\alpha T_1 + 4)^{1/2}$$

Ici : $T_1 = 2.75$ GeV/0.939 GeV = 2.929. D'où :

$$E = 3.14$$

L'énergie cinétique totale T dans le C.M.S. est égale à $E - \sum m_i$; n étant le nombre de particules dans l'état final.

Nous considérerons, parmi toutes les réactions possibles, la série suivante :

$$N + N \longrightarrow N + N + \nu\pi$$

à l'énergie considérée : $0 \leqslant \nu \leqslant 4$

Nous avons fait les calculs par l'approximation gaussienne pour $n = 3$, 5 et 6.

Le tableau suivant montre quelles sont les valeurs de A_n et celles de f_n obtenues par Hagedorn par sa méthode et les valeurs de S_n qui s'en déduisent :

n	3	5	6
A_n	6.326 + 3	1 025 + 3	5.518 + 2
f_n	16.08	5.61 - 2	3.76 - 4
S_n	4.08 - 2	5.47 - 5	6.81 - 7

5.61 - 2 signifiant $5{,}61.10^{-2}$

II - ESSAIS A 25 GeV -

Dans ce cas, $T_1 = 25 \text{ GeV}/0.939 \text{ GeV} = 26.624$. D'

$$E = (2 T_1 + 4)^{1/2}, \quad E = 7.57$$

Nous avons considéré les deux réactions :

$$N + N \longrightarrow N + N + 4\pi$$

et

$$N + N \longrightarrow N + N + 8\pi$$

Pour ces deux cas, nous avons pour A_n, ρ_n(Hagedorn) et S_n(Hagedorn) les valeurs :

n	A_n	n	S_n
6	33.48 + 6	7.93 + 5	2.37 - 2
10	5.53 + 10	4.90 + 4	8.86 - 7

III - RESULTATS DES ESSAIS - ORDRE DE GRANDEUR DE L'APPROXIMATION -

Les résultats sont représentés graphiquement sous forme d'histogramme.

Figure 1 : Variations de $\overline{S}_\mu$ pour n = 3 à 2.75 GeV

Figure 2 : Variations de $\overline{S}_\mu$ pour n = 5 à 2.75 GeV

Figure 3 : Variations de $\overline{S}_\mu$ pour n = 6 à 2.75 GeV et 25 GeV

Figure 4 : Variations de S_μ pour n = 6 à 2.75 GeV

Figure 5 : Variations de $\overline{S}_\mu$ pour n = 10 à 25 GeV

Figure 6 : Variations de S_μ pour n = 10 à 25 GeV

La ligne pointillée représente la valeur trouvée par HAGEDORN. Tous les graphiques sont tracés à la même échelle, sauf la figure 6.

La figure 1 montre que, pour n = 3, la valeur trouvée se situe systématiquement au-dessus de celle donnée par HAGEDORN, l'erreur étant d'environ 35 %.

Pour n = 5, sur la figure 2, nous voyons que la valeur est toujours au-dessus mais que maintenant l'erreur n'est plus que de 13 %.

Pour n = 6, figure 3, l'erreur est de 7 % pour 2.75 GeV et d'environ 2 % pour 25 GeV. Sur la figure 4, nous avons représenté la variation de S_μ pour n = 6 à 2.75 GeV, les mêmes courbes étant semblables pour les autres réactions.

Tous ces essais ont été effectués avec au maximum 250 tirages. Nous voyons que ce chiffre est insuffisant car si les fluctuations commencent déjà à diminuer, elles sont encore assez importantes. Lors de l'utilisation de cette méthode pour des calculs numériques, il faudra effectuer un plus grand nombre de tirages ; nous choisirons 500.

Les figures 5 et 6 représentent les variations de $\overline{S}_\mu$ et S_μ pour n = 10 à 25 GeV. Ces graphiques ne correspondent pas à ce que l'on pouvait attendre. Les fluctuations sont très grandes; ceci provient du terme $\prod_i \varepsilon_i p_i$ et du grand nombre de particules légères. En effet, lorsque l'on tire 10 énergies cinétiques t_i, il y a une forte probabilité pour que l'une au moins soit très faible. Sur les 10 particules, il y a de fortes chances que ce soit l'une des 8 légères qui ait ce t_i faible ; ε_i et p_i correspondant seront alors forcément petits. Dans le produit $\prod_i \varepsilon_i p_i$ l'un des termes sera petit, le produit sera donc lui-même petit. Par contre, si le tirage donnait des t_i à peu près égaux (cet évènement n ayant qu'une très faible probabilité de se produire), puisque 8 sur 10 des particules ont même masse, 8 sur 10 des produits auraient même valeur. Dans ce cas, le terme $\prod_i \varepsilon_i p_i$ serait énorme.

On explique ainsi les grandes fluctuations qui se produisent pour S_μ

dans la réaction considérée. Ces fluctuations exigent un nombre de tirages plus grand que celui que l'on pouvait considéré comme nécessaire pour une réaction conduisant à un grand nombre de particules.

Pour vérifier les conclusions précédentes, nous avons fait le calcul pour une réaction donnant un assez grand nombre de particules, n = 8, mais ces particules étant en grande partie lourdes et différentes.

$$N + N \longrightarrow D + N + \bar{N}^{*} + N + \bar{N} + 3\pi$$

$m_1 = 1,998$

$m_2 = 1,31$

$m_3 = m_4 = m_5 = 1.000$

$m_6 = m_7 = m_8 = 0,147$

La comparaison est frappante (fig. 7) : la convergence est maintenant très rapide et excellente : l'approximation étant de quelques % après 100 tirages seulement.

Nous pouvons donc dire, en interpolant pour les cas intermédiaires qui n'ont pas été calculés, que, dans son état actuel, l'approximation utilisée donne de mauvais résultats pour un petit nombre de particules (35 % pour n = 3, de l'ordre de 20 % pour n = 4), mais qu'elle devient bonne pour un nombre de particules supérieur (10 % pour n = 5, quelques % pour $n \geqslant 6$). De plus, pour un grand nombre de particules, si la validité de l approximation ne fait pas doute, la convergence est lente dans le cas de particules légères, mais elle redevient rapide si l'on a des particules lourdes.

IV - AMELIORATION POSSIBLE DE LA METHODE -

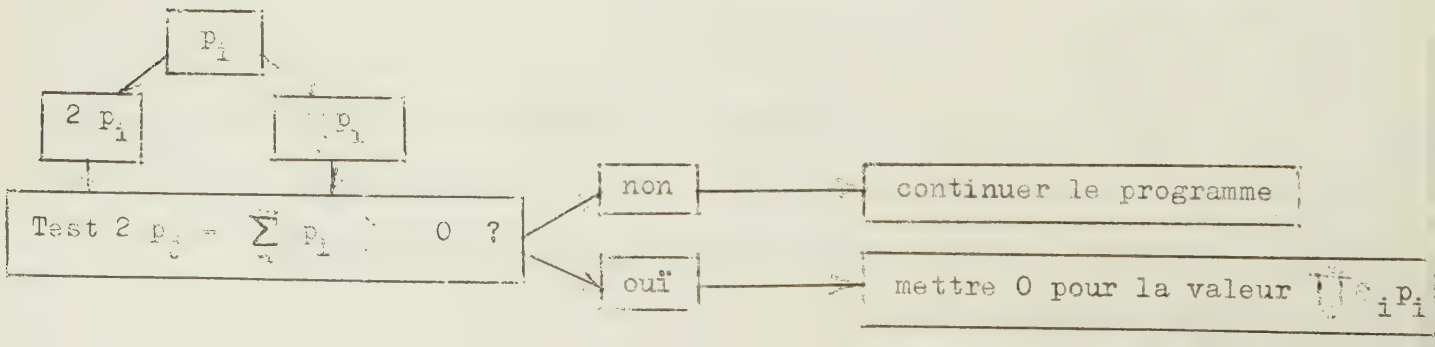
Dans la méthode d'HAGEDORN, la probabilité W_n, que nous avons supposée être gaussienne, était nulle quand l'impulsion n'était pas conservée, c'est-à-dire quand $2\,p_j \gg \sum_{1}^{n} p_i$. Dans notre calcul, cette probabilité n'est pas nulle, elle est simplement faible.

Or, pour être logique, il ne faut pas exclure les cas où l'impulsion n'est pas conservée, il faut les compter comme ayant une probabilité nulle, ce qui est différent. Alors une amélioration de notre méthode se présente de façon évidente : dans le cas où $2\,p_j \gg \sum_{i \neq j} p_i$, il ne fait pas calculer la valeur que donne notre approximation, mais il faut mettre la valeur exacte que l'on connait et qui est 0. Puisque l'on remplace une valeur petite par une valeur nulle, le résultat final sera plus faible que celui que l'on trouvait jusqu'alors. Mais justement, nous trouvions des valeurs systématiquement trop fortes, surtout quand n était faible. Or, les résultats qui seront touchés seront ceux précisément où n est petit. En effet, lorsque n est petit, 3 ou 4, le nombre de tirages, où l'impulsion n'est pas conservée est grand (environ 1 sur 2, nous le verrons, pour n = 3) mais pour n supérieur (à partir de 6), il y a une probabilité très faible pour que, dans un tirage l'un des p_i soit supérieur à la somme des autres.

Les résultats ainsi obtenus seront plus faibles pour n petit, là précisément où ils étaient trop forts et ne seront pas sensiblement modifiés pour n grand, là où ils étaient acceptables. Outre l'amélioration qu'elle apporte, cette modification donne à la méthode un appui physique qui lui faisit défaut : la conservation de l'impulsion.

V - VERIFICATION DE CETTE AMELIORATION -

Pour introduire le test de la conservation de l'impulsion, l'organigramme des calculs a été modifié de la façon suivante, à partir de l'obtention des p_i :



Deux réactions, parmi celles déjà étudiées, ont été choisies pour faire des essais :

n = 3	$N + N \longrightarrow N + N + \pi$	à	2.75 GeV
n = 5	$N + N \longrightarrow N + N + 3\,\pi$	à	2.75 GeV

400 tirages furent effectués pour chacune de ces réactions. Les résultats obtenus sont représentés figure 8. Les modifications apportées sont plus importantes que prévu : pour n = 3, alors que l'on obtenait 35 % d'erreur au-dessus, il n'y a maintenant que 25 %, mais en-dessous. Le résultat a donc été fortement diminué. En effet, nous verrons par la suite que pour n= 3, 4, 5, 6, et 7, il y a environ 300, 150, 70, 40 et 10 tirages sur 500 pour lesquels l'impulsion n'est pas conservée (à partir de n = 8, l'effet de conservation de l'impulsion peut être négligée et la partie correspondante de l'organigramme supprimée du programme des calculs).

Pour n = 5, la modification est plus satisfaisante. De 13 %, l'erreur tombe à 7 %.

Donc avec le test de conservation de l'impulsion, l'erreur commise en employant l'approximation gaussienne est d'environ 25 % pour n=3, 10 % pour n = 4, 5 % pour n = 5.

Puisque nous sommes sûrs que les erreurs sur n = 3 et 4 sont "par défaut", dans les applications numériques ultérieures nous augmenterons systématiquement les valeurs trouvées de 25 % et 10 % respectivement.

VI - DUREE DES CALCULS -

Pour les premiers essais, le programme des calculs fut écrit en langage "logique extérieur FLAIR". Cette méthode de programmation sur ordinateur IBM 650 avait l'avantage d'être rapide, mais elle nécessite ensuite un temps de machine assez long. Nous nous sommes vite rendus compte que sous cette forme le programme ne pouvait être utilisé pour des applications numériques complètes. Il fut donc

écrit de nouveau, mais en langage symbolique PASO. La figure 9 indique quel est le temps de calcul, en fonction de n, pour effectuer une série de 10 tirages, en FLAIR et en PASO. Nous voyons que le temps croît linéairement avec n et que le deuxième programme est de 7 à 10 fois plus rapide (suivant n).

Ainsi, grâce à l'approximation gaussienne, le calcul de multiplicité des particules secondaires peut être fait dans un temps raisonnable, même sur une machine relativement faible comme l'IBM 650 et avec une précision acceptable.

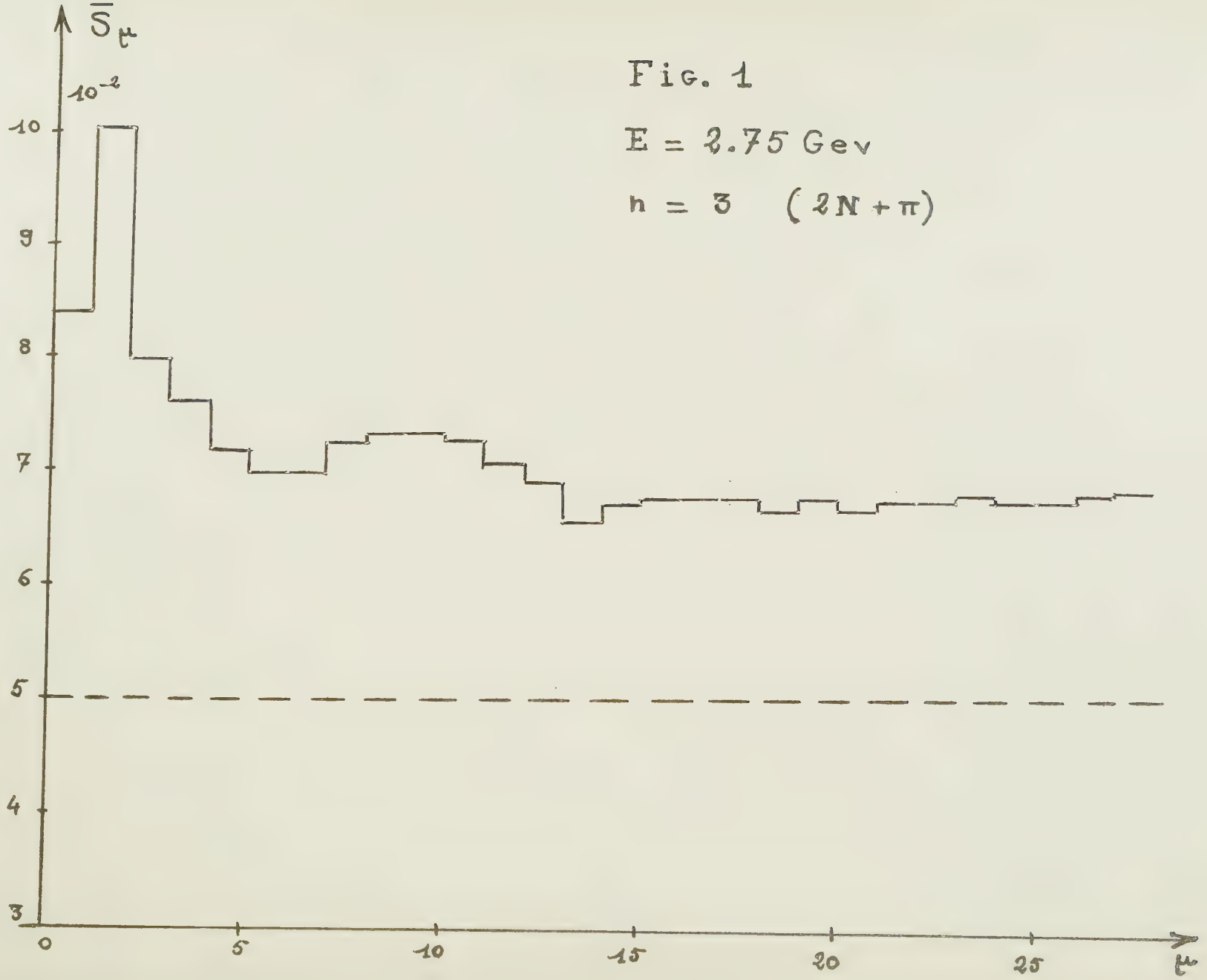


Fig. 1

E = 2.75 Gev

n = 3 (2N + π)

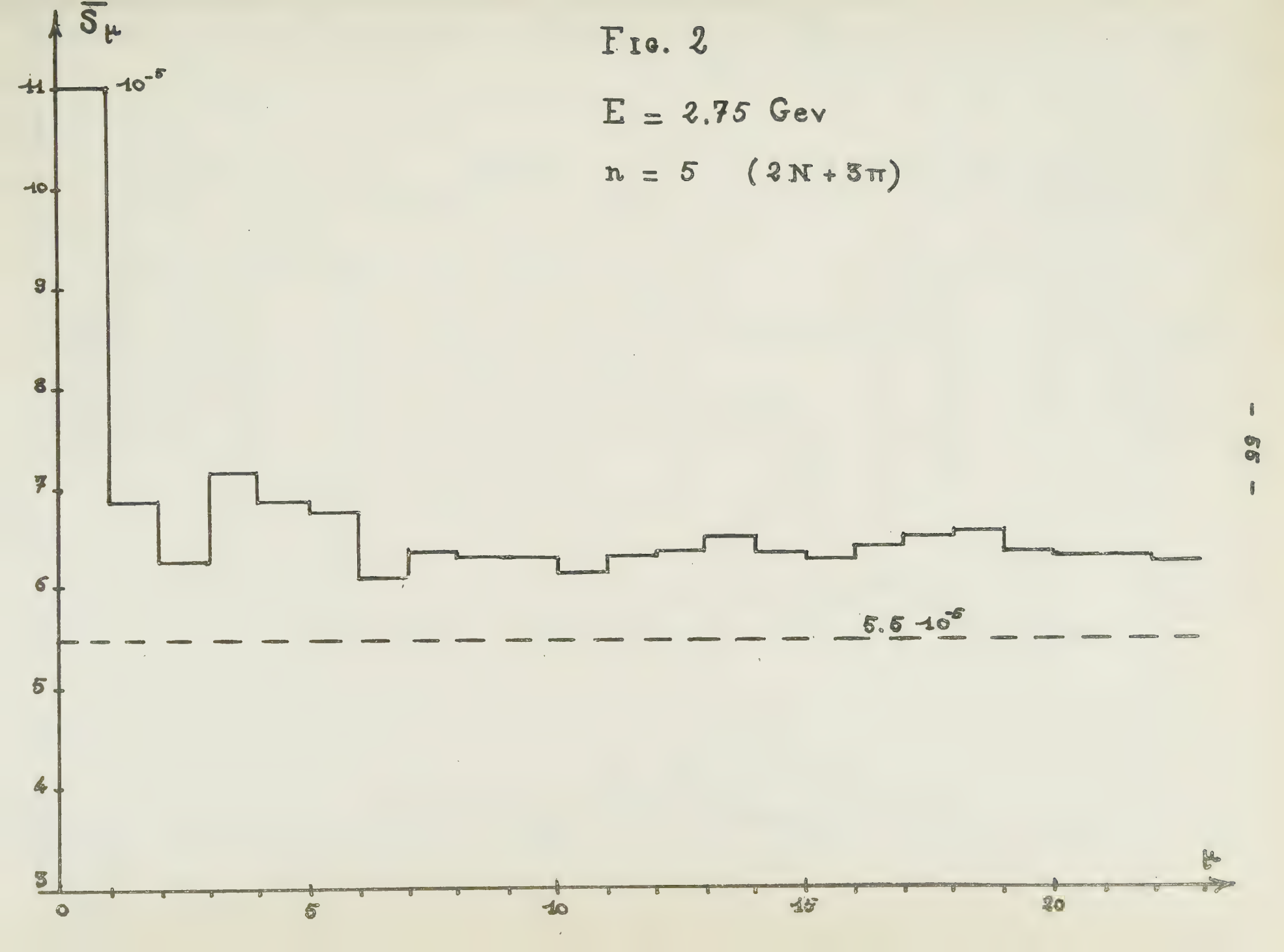
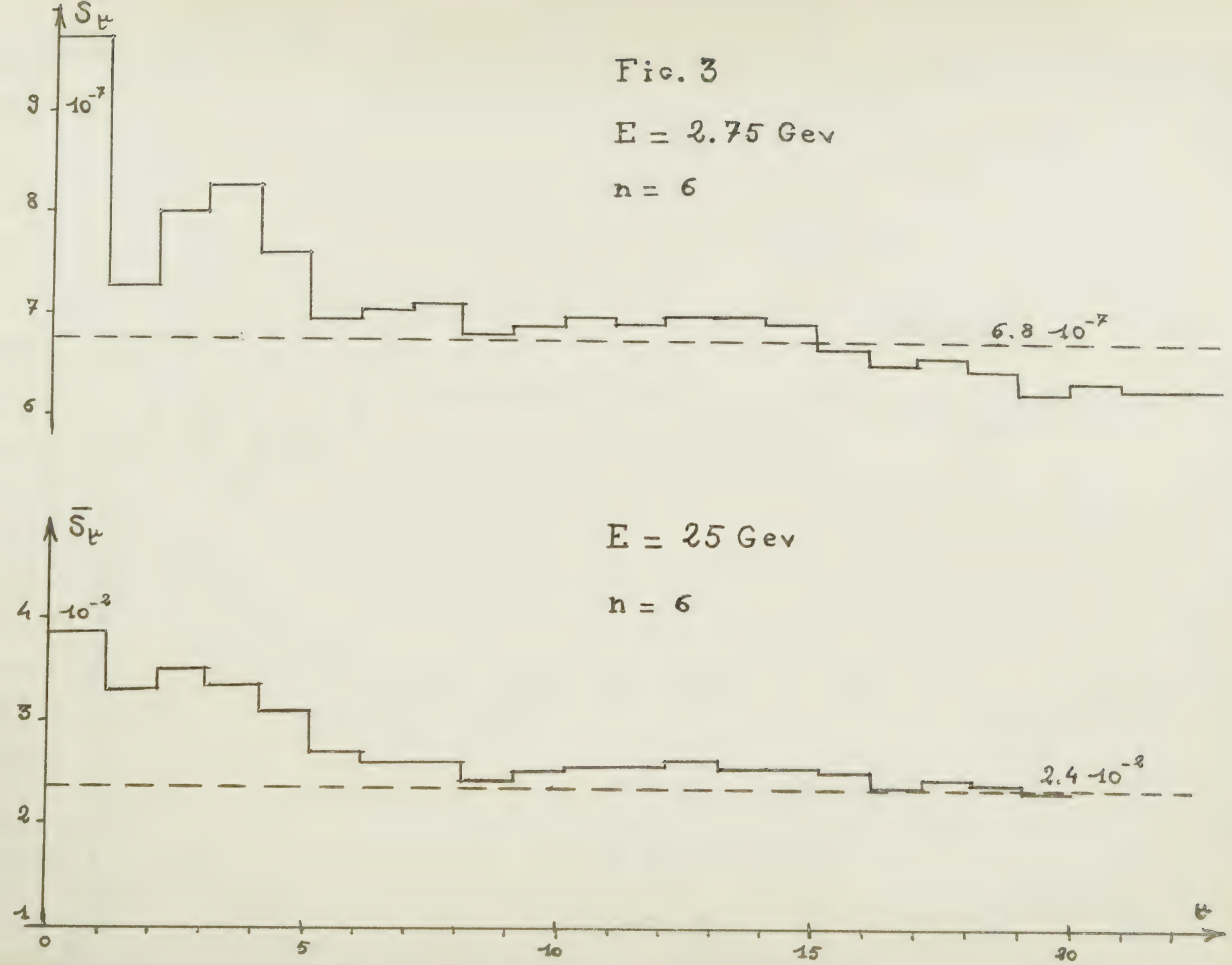


FIG. 2
E = 2.75 Gev
n = 5 (2N + 3π)
$\overline{S_\mu}$
10^{-5}
11
10
9
8
7
6
5
4
3
$5.5\ 10^{-6}$
t
0
5
10
15
20

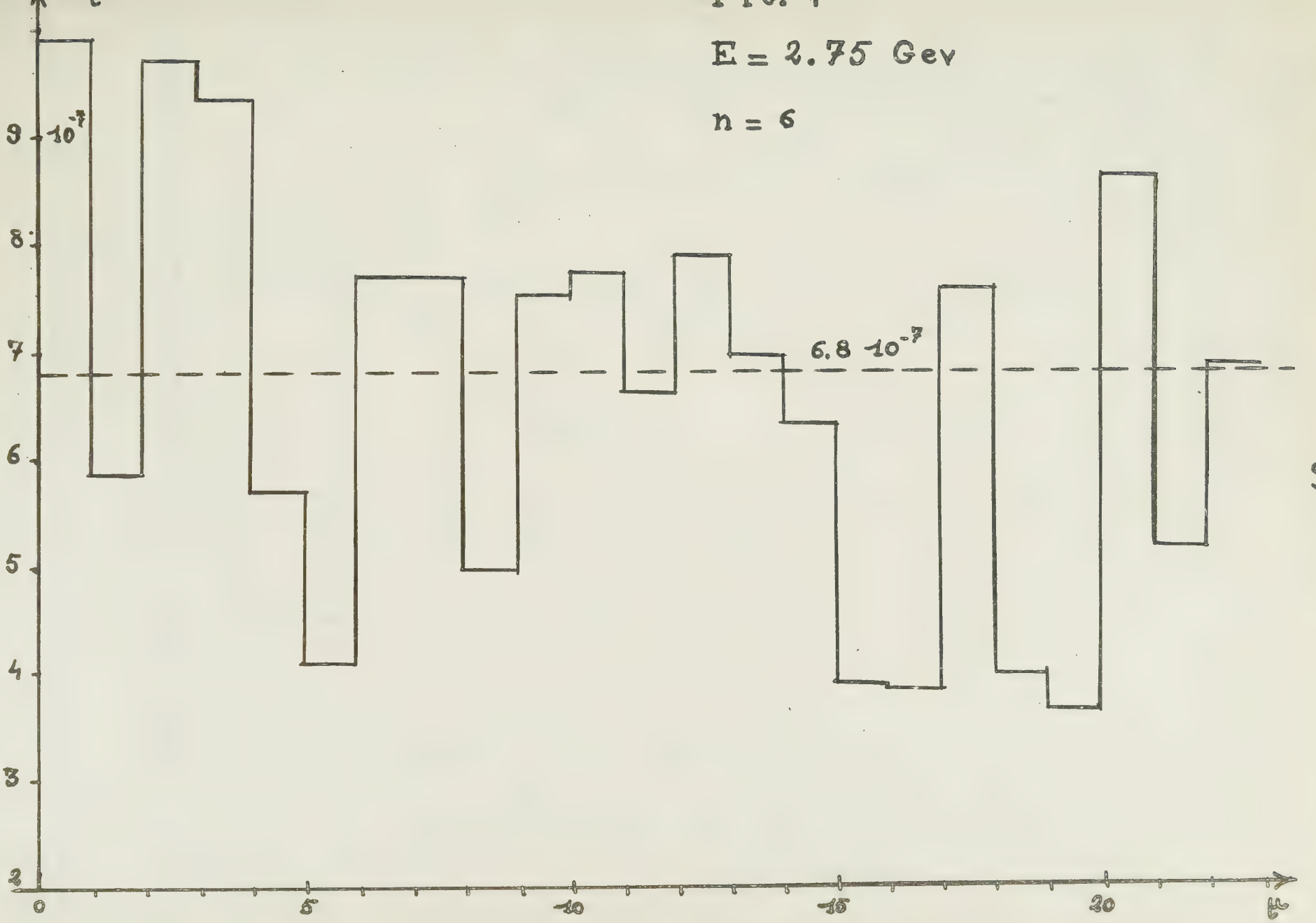

S_t
10^{-7}
9
8
7
6
$6.8\ 10^{-7}$
Fig. 3
E = 2.75 Gev
n = 6
$\bar{S}_t$
10^{-2}
4
3
2
1
$2.4\ 10^{-2}$
E = 25 Gev
n = 6
t
0
5
10
15
20

1956

Fig. 4

E = 2.75 Gev

n = 6



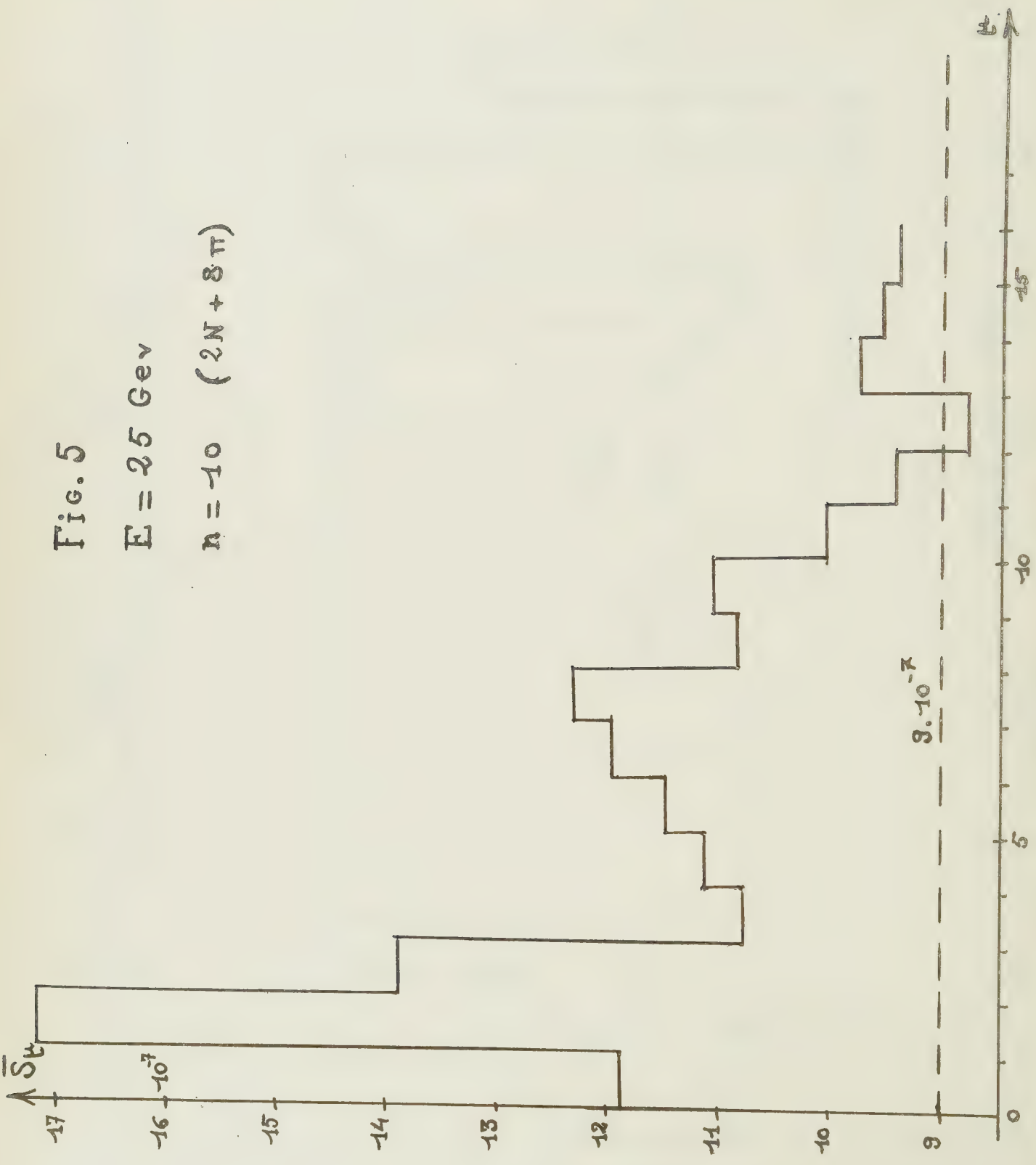


Fig. 5
E = 25 Gev
n = 10 (2N + 8π)
$\bar{S}_\mu$
10^{-7}
17
16
15
14
13
12
11
10
9
9.10^{-7}
0
5
10
15
t

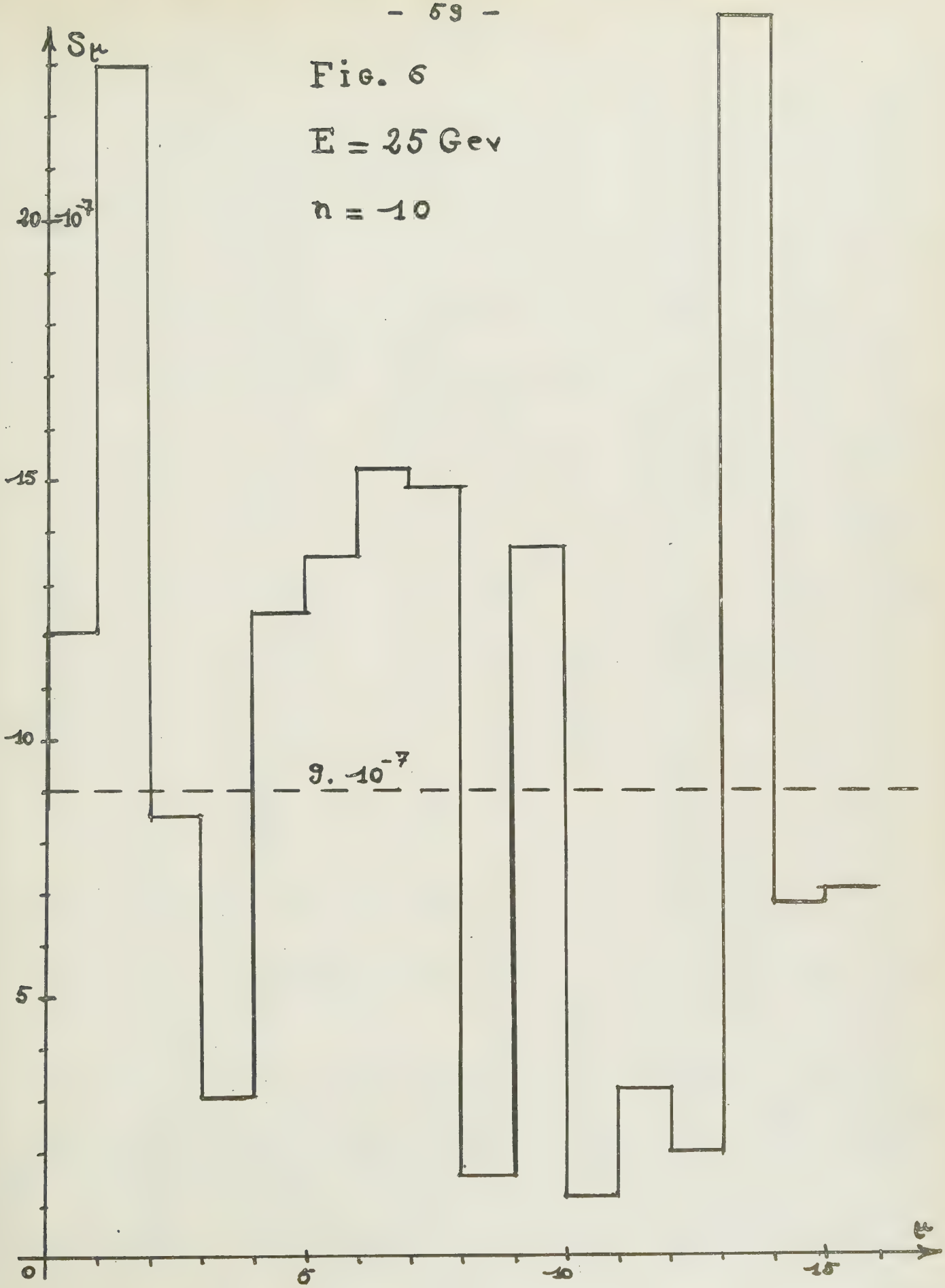


Fig. 6

E = 25 Gev

n = 10

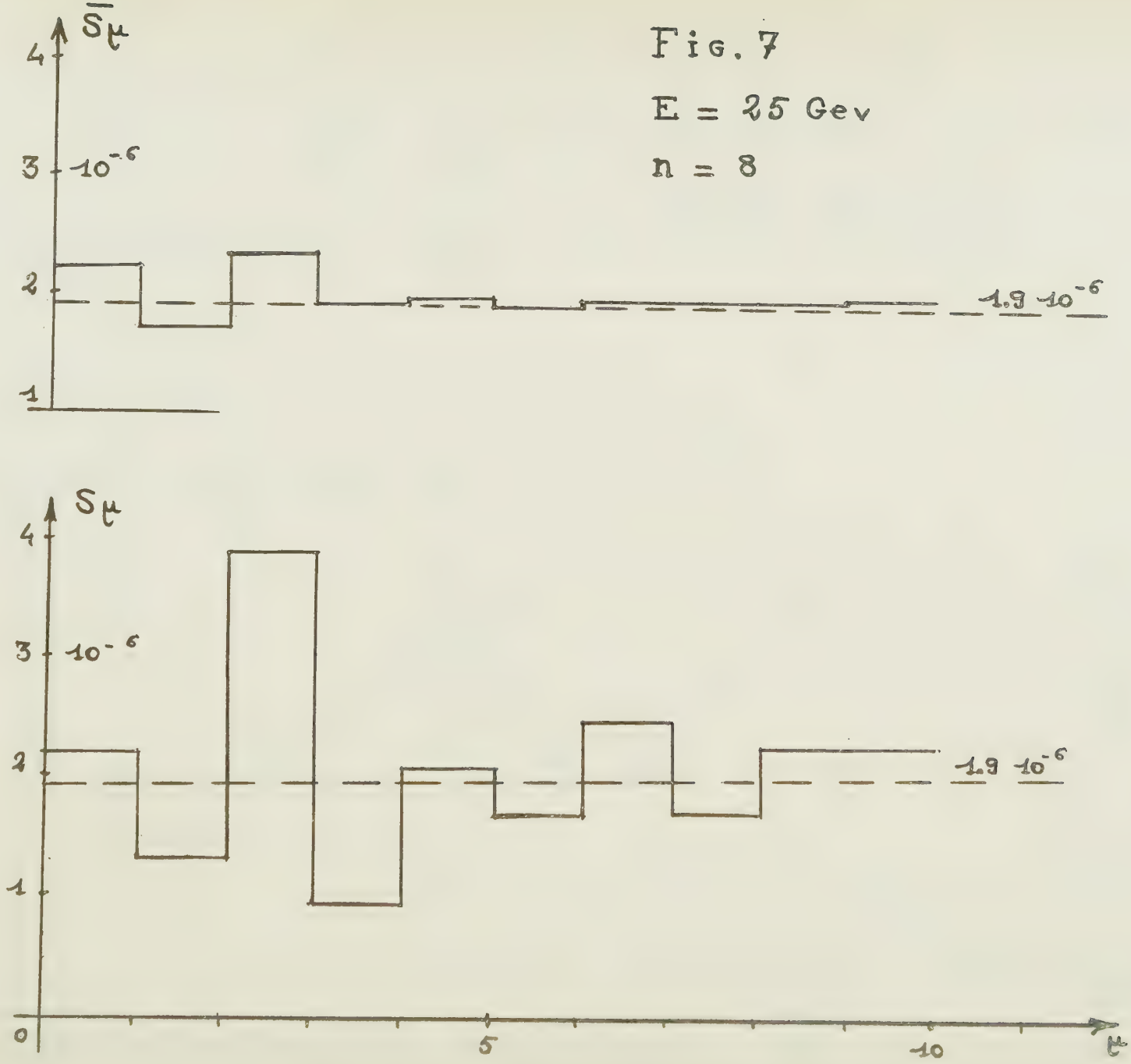
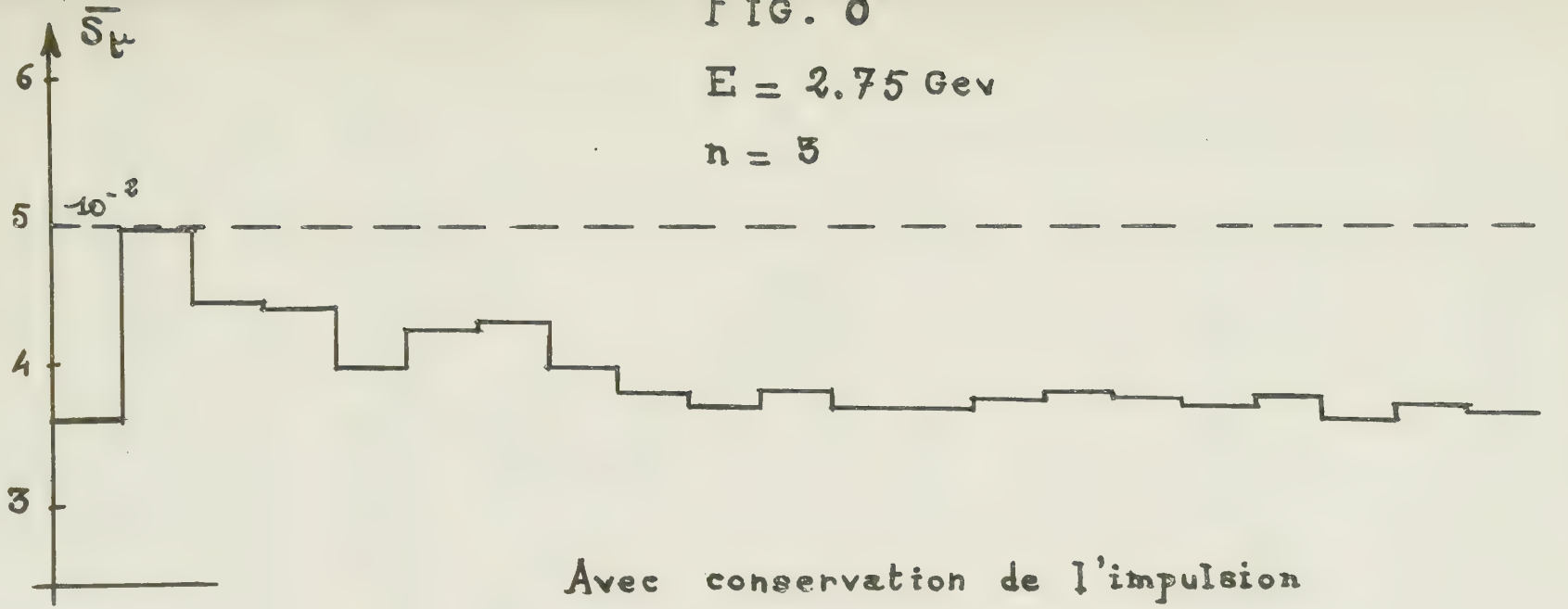


Fig. 7

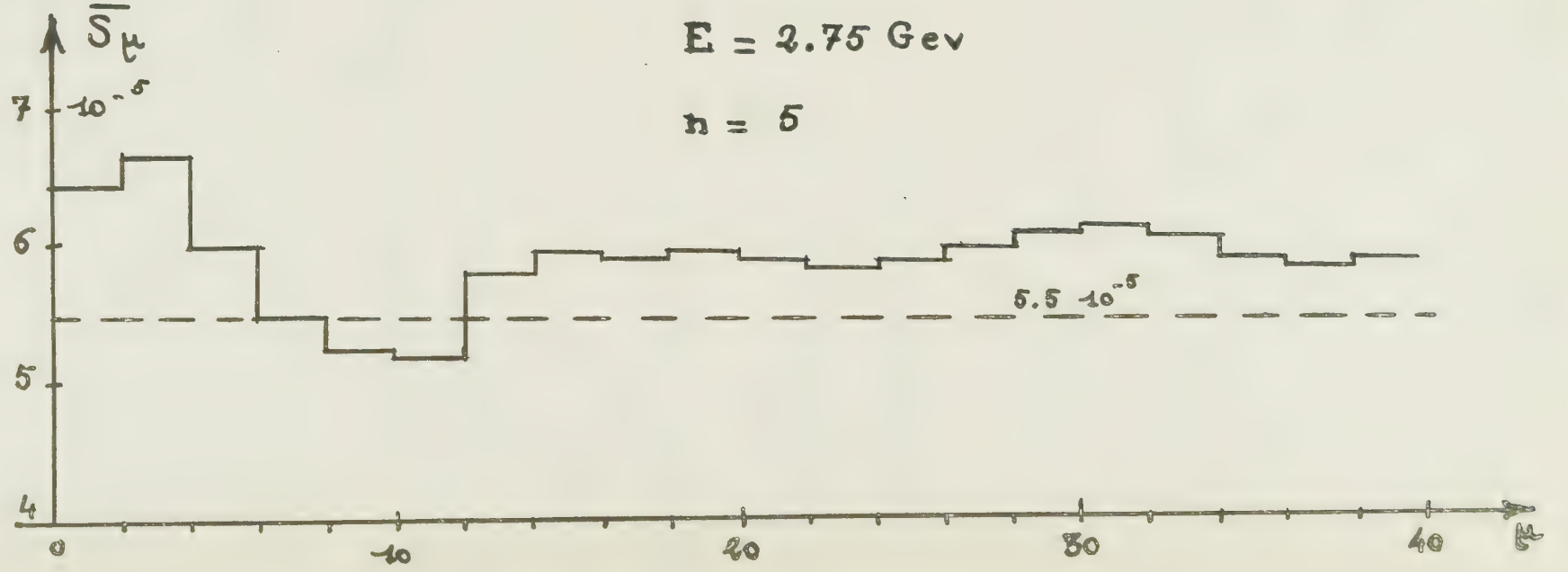
E = 25 Gev

n = 8

FIG. 8



Avec conservation de l'impulsion



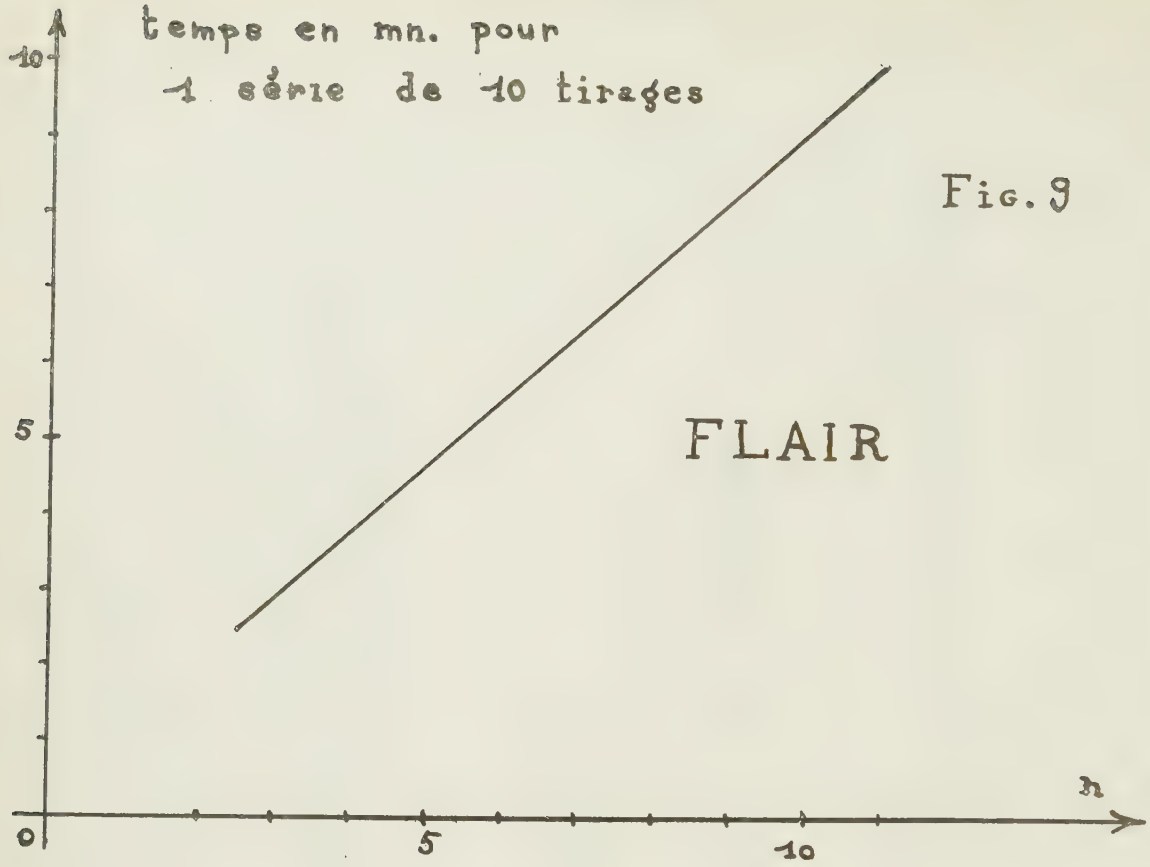
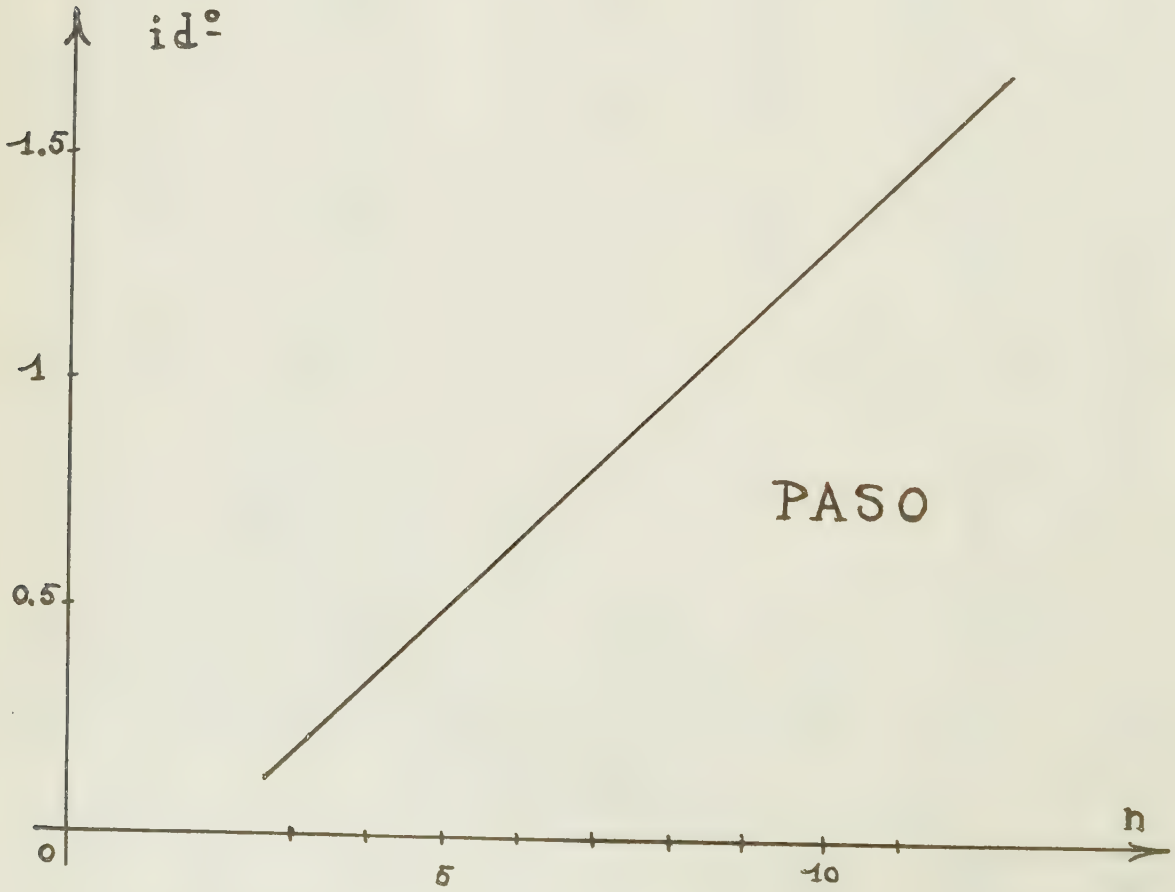

temps en mn. pour
1 série de 10 tirages
10
5
0
5
10
n
FLAIR

Fig. 9


id°
1.5
1
0.5
0
5
10
n
PASO

C H A P I T R E VI

PRODUCTION MULTIPLE DE PARTICULES DANS LES COLLISIONS π^- - p à 5 GeV

La théorie étudiée a été appliquée au calcul de la production multiple de particules dans les collisions π^- - p à 5 GeV.

Les particules envisagées sont les suivantes :

- les nucléons et antinucléons N et $\overline{N}$
- les mésons π, K et $\overline{K}$
- les hypérons Λ , Σ et Ξ ,

ainsi que les particules excitées N^* , K^* et Λ^* , intermédiaires, de vie moyenne courte, mais plus longue cependant que la durée de l'intéraction et qui se désexcitent suivant la réaction :

$$X^* \longrightarrow X + \pi$$

Les caractéristiques de ces particules sont données dans le tableau suivant (réf. 10) :

Particule	Masse	spin	isospin	étrangeté	baryon ?
N	1.000	1/2	1/2	0	ouï
N^*	1.310	3/2	3/2	0	ouï
π	0.147	0	1	0	non
K	0.526	0	1/2	++1	non
K^*	0.938	1	1/2	+ 1	non
Λ	1.188	1/2	0	- 1	ouï
Λ^*	1.471	1/2	1	- 1	ouï
Σ	1.270	1/2	1	- 1	ouï
Ξ	1.408	1/2	1/2	- 2	ouï

Tous les états finaux remplissant les diverses conditions physiques et conduisent à des probabilités non négligeables ont été étudiés.

I - LES CONDITIONS PHYSIQUES -

Définissons d'abord les notations employées :

- T_ℓ : Energie cinétique de la particule incidente dans le système du laboratoire.
- E : Energie totale dans le C.M.S.
- $\mathcal{T}$: Spin isotopique du système formé par les deux particules incidentes.
- n : Nombre de particules dans l'état final.
- T : Energie cinétique totale de ces particules émergentes dans le C.M.S.
- m_i : Masses au repos de ces particules.

1 - Conservation de l'énergie -

L'énergie de masse totale de toutes les particules émergentes doit être inférieure ou égale à l'énergie totale des deux particules incidentes.

$$E \geqslant \sum_{1}^{n} m_i$$

Calculons E. La formule donnant l'énergie totale, dans le système du centre de masse, d'un nucléon et d'une particule de masse m est (cf. appendice III) :

$$E = \left[2 T_\ell + (1 + m)^2 \right]^{1/2}$$

dans notre cas, T_ℓ = 5 GeV/0.939 GeV = 5.325 et m = 0.1471. D'où il vient :

$$\boxed{E = 3.461}$$

Les états finaux énergétiquement possibles sont donc ceux qui rempliront la condition :

$$\boxed{\sum_{1}^{n} m_i \leqslant 3.461}$$

2 - Conservation de l'étrangeté -

A la production, l'étrangeté se conserve ; la somme algébrique des étrangetés dans l'état initial et dans l'état final doit être la même.

3 - Conservation du nombre de baryons -

Les particules élémentaires sont classées en trois catégories : les baryons, les mésons et les leptons. Dans toute réaction le nombre de baryons doit être conservé : il doit y avoir autant de baryons dans l'état initial que dans l'état final. Un antibaryon est compté pour -1 baryon.

Compte-tenu de ces trois conditions, les états finaux possibles après une collision π^- - p à 5 GeV sont indiqués dans le tableau suivant :

$\pi^- + p \longrightarrow N + \nu\,\pi$	$\pi^- + p \longrightarrow \Xi + 2K^* + \nu\pi$
$N^* + \nu\,\pi$	$N + K + \bar{K} + \nu\,\pi$
$\Lambda + K + \nu\pi$	$N + K^* + \bar{K} + \nu\pi$
$\Lambda^* + K + \nu\,\pi$	$N + K^* + \bar{K}^* + \nu\pi$
$\Lambda + K^* + \nu\,\pi$	$N^* + K + \bar{K} + \nu\pi$
$\Lambda^* + K^* + \nu\,\pi$	$N^* + K^* + \bar{K} + \nu\pi$
$\Sigma + K + \nu\,\pi$	$N^* + K^* + \bar{K}^* + \nu\pi$
$\Sigma + K^* + \nu\,\pi$	$N + N + \bar{N} + \nu\pi$
$\Xi + 2K + \nu\pi$	$N^* + N + \bar{N} + \nu\pi$
$\Xi + K^* + K + \nu\,\pi$	$N + N + \bar{N}^* + \nu\pi$

La valeur maximum de ν étant fixée par la condition de conservation de l'énergie, Il faut maintenant calculer le poids statistique de ces différentes réactions.

II - EXPRESSION DU POIDS STATISTIQUE -

Comme il a été vu au chapitre I, l'expression donnant le poids statistique est :

$$W = f_\omega \frac{\prod_1^{\tilde{n}} (2 s_i + 1)}{\prod N_i !} P(\tau) \rho(n, m_i, T)$$

f_ω étant le facteur d'intéraction

s_i le spin de la particule i

N_i le nombre de particules indiscernables

$P(\tau)$ le facteur de spin isotopique

$\rho(n, m_i, T)$ le facteur d'espace des phases

Nous allons examiner successivement ces différents facteurs.

1 - Facteur d'intéraction -

Au chapitre I, nous avons vu que ce facteur f_ω était égal à n, ω étant le "volume d'intéraction". Pour la production de pions, ce volume est celui d'une sphère ayant comme rayon la longueur d'onde de Compton du pion et ayant subi la contraction de Lorentz. Nous appelerons ce volume ω_π.

Le problème se complique du fait que nous devons considérer en outre la production d'hypérons et de mésons K. Nous sommes ainsi amenés à prendre trois volumes différents :

- ω_π pour les nucléons et les mésons π,
- ω_Y pour les hypérons,
- ω_K pour les mésons K.

Le facteur d'intéraction s'écrit alors :

$$f_\omega = \omega_\pi^N \; \omega_Y^Y \; \omega_K^K$$

N, Y, et K étant respectivement le nombre de particules dans chacune des trois catégories.

Pour ω_π nous conserverons la définition donnée plus haut. Pour ω_Y et ω_K la plus grande incertitude régne. Il semble qu'en plus de la notion géométrique de "volume d'intéraction", il faille tenir compte aussi de "force de couplage". D'après les travaux de HAGEDORN (réf. (11) et (12), 1960), un jeu de ω assez satisfaisant, c'est à dire donnant des résultats en accord avec l'expérience, semble être le suivant :

$$\omega_Y = \omega_\pi$$
$$\omega_K = 1/10 \; \omega_\pi$$

C'est celui que nous avons adopté dans ce travail.

Calculons ω_π que nous désignerons par la suite ω,

$$\omega = 1/\gamma \; \omega_o$$

$1/\gamma$ étant le facteur de contraction de Lorentz et ω_o le volume de la sphère ayant pour rayon la longueur d'onde de Compton du pion.

$$\omega = \frac{\Sigma_m}{E} \cdot \frac{4\pi}{3} r^3$$

Ici,

$$\Sigma m = 1 + 0.1471$$

$$E = 3.4608$$

Nous prendrons :

$$r = 1{,}2.10^{-13} \text{ cm.}$$

ce qui condiit à :

$$\boxed{\omega = 2.905}$$ dans notre système d'unités.

Le facteur d'intéraction sera alors égal à :

$$\boxed{f_\omega = \frac{(2.905)^n}{10^K}}$$

2 - Facteur de spin -

Ce facteur donne la multiplicité des états de spin. Il ne présente pas de difficulté. Il est égal à $\prod_1^n (2 s_i + 1)$; c'est à dire que s'il y a n_1, n_2 et n_3 particules de spin 1/2, 1 et 3/2, ce facteur est égal à :

$$2^{n_1 + n_2}\, 3^{n_2}$$

3 - Facteur d'indiscernabilité -

Seront considérées comme indiscernables, les particules de même nature, quelle que soit leur charge. Une paire particule-antiparticule constitue un système de deux particules discernables. Par exemple :

- Pour un état $N + 3\pi$, le facteur d'indiscernabilité sera 1/3 !
- Pour un état $N + K + \overline{K} + 2\pi$, le facteur d'indiscernabilité sera 1/2 !
- Pour un état $\Xi + 2K + 3\pi$, le facteur d'indiscernabilité sera 1/2 ! 3 !)

Le produit du facteur de spin et du facteur d'indiscernabilité sera noté dans les tables f_{SI}.

4 - Facteur de spin isotopique -

Le poids statistique d'un état est proportionnel au nombre de combinaisons possibles de spin isotopique, compatibles avec un spin isotopique total donné τ et une charge totale donnée. Soit $P_{\alpha\beta\gamma}(\tau)$ ce facteur; α, β et γ étant le nombre de particules de spin 1/2, 1 et 3/2.

Nous savons que le spin isotopique τ et le nombre quantique de charge m d'un système de deux particules dont les spins isotopiques et les nombres quantiques de charge sont respectivement T_1 et m_1, T_2 et m_2 sont tels que :

$$m = m_1 + m_2$$

$$|T_1 - T_2| \leqslant \tau \leqslant T_1 + T_2$$

Dans notre cas :

$$T_1 = 1 \qquad m_1 = -1$$
$$T_2 = 1/2 \qquad m_2 = +1/2$$

Nous avons donc :

$$m = -1/2 \quad \text{et} \quad \tau = 1/2 \text{ ou } 3/2$$

Pour les deux valeurs de spin isotopique, nous avons bien $|m| \leqslant \tau$; le système $(\pi^- - p)$ est donc la superposition de deux états :

$$(1/2, -1/2) \qquad \text{et} \qquad (3/2, -1/2)$$

Par utilisation des coefficients de Clebsch-Gordan, nous trouvons :

$$\Psi = \sqrt{2/3}\,(1/2, -1/2) + \sqrt{1/3}\,(3/2, -1/2)$$

Le système $(\pi^- - p)$ a une probabilité de 2/3 pour se trouver dans l'état $\tau = 1/2$ et de 1/3 dans l'état $\tau = 3/2$. Nous avons fait l'hypothèse classique que la section efficace était la même pour ces deux états.

Des tables de $P_{\alpha\beta\gamma}(\tau)$ ont été publiées par YEIVIN-DE SHALIT (réf. 13) pour $\gamma = 0$ et par Barashenkov (réf. 14) pour $\gamma \neq 0$. Dans chaque cas, nous avons pondéré sur les deux états de spin pour calculer le facteur P, en écrivant :

$$P = 2/3\ P(1/2) + 1/3\ P(3/2)$$

par exemple pour l'état $N^* + K + \bar{K} + 2\pi$.

$$\alpha = 2 \qquad \beta = 2 \qquad \gamma = 1$$

Les tables donnent : $P_{2,2,1}(1/2) = 7$ et $P_{2,2,1}(3/2) = 10$. Nous avons pris comme valeur $P = 8$.

5 - Eléments d'espace des phases -

Cette quantité est donnée par la formule :

$$\rho\ (n_i, m_i, T) = (4\pi)^n \left[\frac{3}{2\pi}\right]^{3/2} \frac{T^{n-1}}{(n-1)\ !} \frac{\left\langle \prod_i^n \varepsilon_i p_i \right\rangle}{\left\langle \sum_i^m p_i^{\,2} \right\rangle^{3/2}}$$

$$= C_n\ T^{n-1}\ S(n_i, m_i, T)$$

avec :

$$C_n = (4\pi)^n \left[\frac{3}{2\pi}\right]^{3/2} \frac{1}{(n-1)\ !}$$

La quantité C_n ne dépend que du nombre de particules. Les C_n sont donnés dans le tableau ci-dessous :

n	C_n	n	C_n
3	3.274 + 2	7	2.262 + 4
4	1.370 + 3	8	4.058 + 4
5	4.303 + 3	9	6.370 + 4
6	1.080 + 4		

Pour chaque réaction, il faut calculer $T = E - \sum_{i}^{n} m_i$ et T^{n-1}. Le terme S se calcule par emploi de l'approximation gaussienne et de la méthode de Monte-Carlo étudiées aux chapitres précédents. Pour chaque réaction, 500 tirages furent effectués, groupés en 25 séries de 20 de façon à mettre la convergence en évidence ; celle-ci est excellente. La précision obtenue en prenant pour S la valeur de $\overline{S_{25}}$ est de quelques % (< 5 %).

Une plus grande précision aurait été obtenue en utilisant non pas la valeur de $\overline{S_{25}}$, mais celle correspondant à l'asymptote vers laquelle tend la courbe de convergence. Ceci n'a pas été fait pour deux raisons :

- le nombre de graphiques nécessaires était trop important,
- L'amélioration aurait été négligeable devant les approximations que l'on est amené à faire, sur le facteur d'interaction en particulier.

Pour n = 2, l'élément d'espace des phases fut calculé à l'aide de la formule exacte établie au chapitre II-B.

A l'intérieur de chaque série de réactions, comme par exemple la série $\Lambda + K + n\pi$, nous avons fait varier n de façon que le rapport du poids statistique le plus fort au poids statistique le plus faible soit au moins égal à 10^3.

Le nombre de réactions calculées est de 85 dont 8 directement (n=2) et 77 ($n \geqslant 3$) par l'approximation gaussienne sur ordinateur électronique. Lorsque les poids statistiques de toutes les réactions ont été calculé s, on passe aux probabilités relatives pour l'opération :

$$P_i\,\% = \frac{100\ W_i}{75\ W_i}$$

Nous obtenons ainsi la fraction de la section efficace totale correspondant à une réaction ou à un groupe de réactions.

III - RESULTATS OBTENUS -

1 - Probabilités relatives des différents processus -

Les tables I à VI donnent les poids statistiques et les probabilités relatives des états finaux, ainsi que les différents facteurs intermédiaires.

La table VII donne les pourcentages par groupe de réactions. Nous voyons que dans 80 % des intéractions, il n'y a dans l'état final que des nucléons et des mésons π. Dans 6 %, il y a en plus une paire N - $\overline{N}$. Dans 2 %, il y a en plus une paire K - anti-K. Dans 12 % des intéractions il y a production de particules étranges.

Dans les tables VIII et IX se trouve la liste des probabilités relatives (en %) des états tels que ces probabilités soient supérieures à 0,001 %. Ceci correspond à la probabilité maximum observable avec les techniques expérimentales actuelles. Il y a 70 réactions correspondant à des probabilités supérieures à 0,001 %.

2 - Production de mésons π -

Le tableau suivant montre les probabilités relatives en % correspondant aux différents nombres de π créés dans trois versions différentes :

- I : si l'on considère uniquement la série d'états finaux N + nπ.
- II : Si l'on considère uniquement les séries N + nπ et N^* + nπ.
- III : Si l'on considère toutes les réactions.

Nombres de π créés	I	II	III
0	1.66	0.78	4.80
1	25.86	13.54	15.67
2	47.79	40.73	39.00
3	21.43	34.89	31.89
4	3.09	9.25	8.00
5	0.17	0.79	0.65
6	-	0.03	0.02
Nombre moyen	1.99	2.41	2.25

La figure 10 donne les courbes de probabilités de pions créés dans les trois versions. Le nombre maximum de pions créés est 5; la production de 6 pions étant faible, mais non négligeable. Les deux valeurs : 2,3 pour le nombre moyen de pions et 5 pour le nombre maximum sont en parfait accord avec les résultats expérimentaux (réf. 15).

3 - Production de particules étranges -

12 % des intéractions conduisent à la production de particules étranges. Ces 12 % sont partagés entre les Λ et les Σ ; la production de Ξ est beaucoup plus faible. Ceci vient du fait que, Ξ ayant une étrangeté - 2, doit être accompagné de 2 K, ces 2 K entraînent un facteur $\omega^2_K = \omega^2_\pi/100$, ce qui diminue fortement le poids statistique. Dans 2 %, il y a une paire K - anti-K.

Les résultats obtenus semblent en accord avec les résultats expérimentaux, bien que ceux-ci soient encore peu nombreux et bien souvent in-

complets en ce qui concerne les particules étranges. Des points de comparaison précis auraient permis de trancher avec plus de sureté le problème du facteur d'intéraction.

4 - Production d'antiparticules -

Nous avons trouvé que 6 % des intéractions conduisaient à la production d'antiprotons. Bien que les résultats expérimentaux à ce sujet soient encore peu précis, il semble que ces valeurs soient trop fortes. La théorie statistique, telle que nous l'avons appliquée, rend donc mal compte de la production d'antiparticules. Jusqu'à ces derniers temps, cette faille de la théorie n'avait pas été mise en évidence.

Un calcul fait pas HAGEDORN (réf. 9) concernait des intéractions p-p à 6.2 GeV. L'énergie totale disponible dans le C.M.S. est alors 4.17 (dans notre cas, nous avions 3.46).

La réaction de production d'antiproton la plus probable (et pratiquement la seule possible) était :

$$N + N \longrightarrow N + N + N + \overline{N}$$

dont la probabilité était de 0.01 %.

Cette réaction correspondait à 4 particules, avec une énergie cinétique disponible T = 0.17.

Dans notre cas, c'est la réaction :

$$\pi + N \longrightarrow N + N + \overline{N}$$

dont la probabilité est de 4%, qui, elle, correspond à trois particules seulement, avec une énergie cinétique totale T = 0.46.

Or, l'examen de la table VI montre que la probabilité pour la production d'antiprotons décroît très rapidement avec l'énergie cinétique disponible et surtout avec le nombre de particules. Les deux résultats, pourtant si

différents, peuvent donc être considérés comme compatibles. Alors, si les résultats expérimentaux infirment catégoriquement cette probabilité de 6 % pour la production d'antiprotons, il faut conclure que la théorie statistique, telle que nous l'avons employée, présente une faille.

Récemment (réf. 16), cette faille a été observée également, à propos de l'étude de la production d'antinucléons, dans les collisions p-p à 25 GeV. Le désaccord atteint un facteur difficile à déterminer, mais qui est certainement supérieur à 20. HAGEDORN propose de l'expliquer par la considération de plusieurs types de collisions : parmi celles-ci, seule les plus centrales interviendraient dans la production de paires.

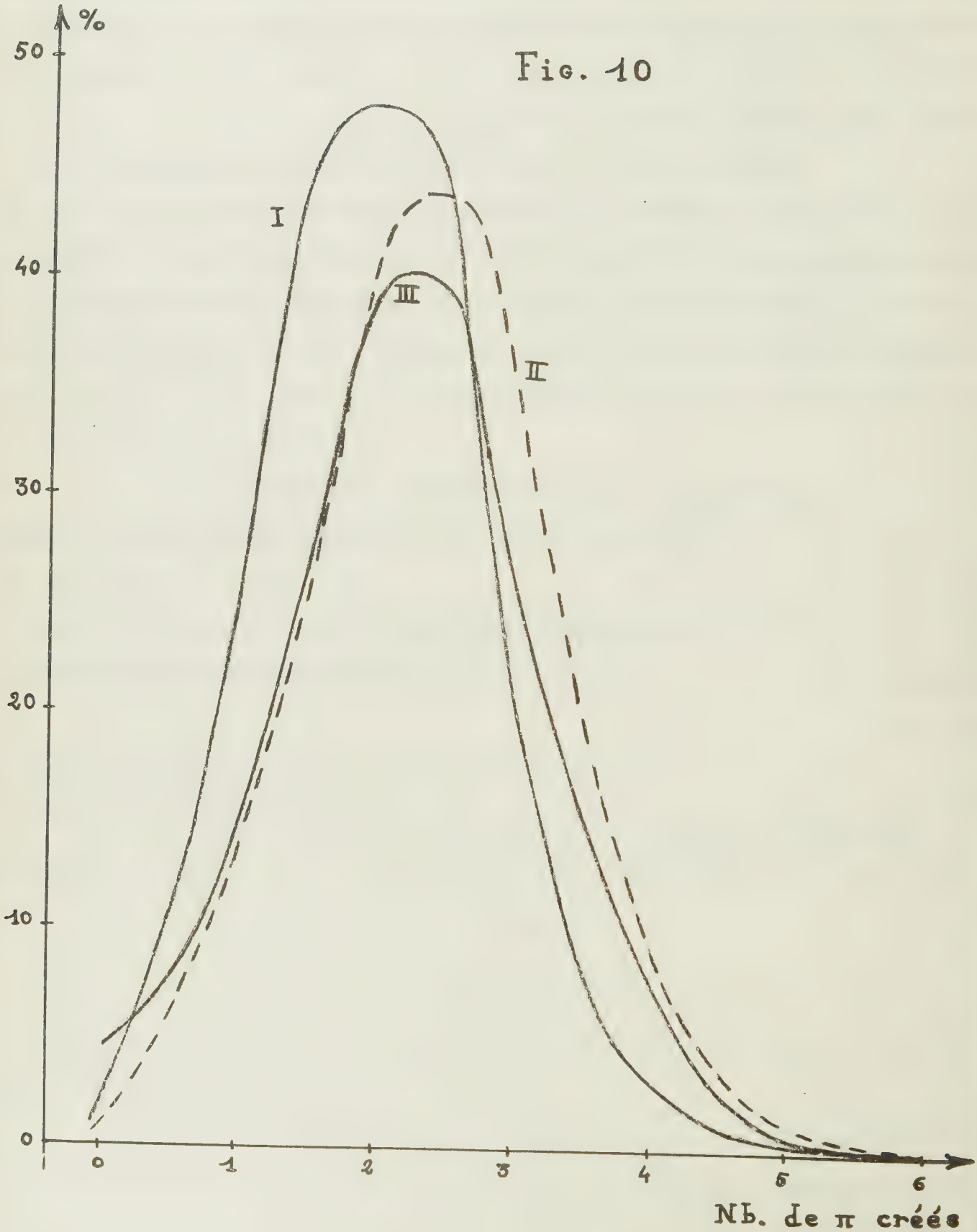
Faisons pour terminer les remarques suivantes :

- il est impossible énergétiquement d'avoir d'autres paires $N - \bar{N}$ que celles envisagées,

- d'autres paires $K + \bar{K}$ sont très peu probables : la plus probable serait $\Lambda + K + K + \bar{K}$, elle conduirait a un poids statistique de l'ordre de 10^{-1},

- la production de couple $\Lambda + \bar{\Lambda}$ est négligeable; l'état le plus probable serait $N + \Lambda + \Lambda$, il aurait un poids statistique très faible car l'énergie cinétique totale serait T = 0.091.

Fig. 10



Etat Final	ρ	f_{SI}	P	f_{ω}	W	%
N + π	1.71 + 1	2	1	8.439 + 0	28.86 + 1	61.96 - 2
N + 2 π	9.16 + 1	1	2	2.451 + 1	44.90 + 2	96.40 - 1
N + 3 π	8.07 + 1	3.333 - 1	4.333	7.121 + 1	82.99 + 2	17.82 + 0
N + 4 π	2.16 + 1	8.333 - 2	10	2.068 + 2	37.22 + 2	79.91 - 1
N + 5 π	2.23 + 0	1.667 - 2	24	6.008 + 2	53.60 + 1	11.51 - 1
N + 6 π	1.03 - 1	2.778 - 3	59.33	1.745 + 3	29.62 + 0	63.59 - 3
N + 7 π	2.34 - 3	3.968 - 4	150	5.069 + 3	70.60 - 2	15.16 - 4
N + 8 π	8.19 - 6	4.960 - 5	386	1.472 + 4	23.08 - 5	49.55 - 8
N^* + π	1.58 + 1	4	1	8.439 + 0	53.66 + I	11.52 - 1
N^* + 2 π	5.96 + 1	2	2.333	2.451 + 1	68.17 + 2	14.64 + 0
N^* + 3 π	3.43 + 1	6.667 - 1	5.667	7.121 + 1	92.28 + 2	19.81 + 0
N^* + 4 π	6.00 + 0	1.667 - 1	14	2.068 + 2	28.96 + 2	62.17 - 1
N^* + 5 π	3.70 - 1	3.333 - 2	35.33	6.008 + 2	26.18 + 1	56.19 - 2
N^* + 6 π	9.69 - 3	5.556 - 3	90.67	1.745 + 3	85.18 - 1	18.29 - 3
N^* + 7 π	1.10 - 4	7.936 - 4	236	5.069 + 3	10.44 - 2	22.32 - 5

- T A B L E II -

Etat Final	ρ	f_{SI}	P	$\rho \cdot f_{SI} \cdot P$	f_{ω}	W	%
$\Lambda + K$	1.85 + 1	2	0.667	24.68 + 0	8.439 - 1	20.83 + 0	44.72 - 3
$\Lambda + K + \pi$	5.40 + 1	2	1	10.80 + 1	2.451 + 0	26.47 + 1	56.83 - 2
$\Lambda + K + 2\pi$	2.81 + 1	1	2	56.20 + 0	7.121 + 0	40.02 + 1	85.91 - 2
$\Lambda + K + 3\pi$	3.59 + 0	3.333 - 1	4.333	51.85 - 1	2.068 + 1	10.72 + 1	23.02 - 2
$\Lambda + K + 4\pi$	1.51 - 1	8.333 - 2	10	12.58 - 2	6.008 + 1	75.50 - 1	16.13 - 3
$\Lambda + K + 5\pi$	2.31 - 3	1.667 - 2	24	92.42 - 5	1.745 + 2	16.13 - 2	34.56 - 5
$\Lambda^* + K$	1.44 + 1	2	1	29.20 + 0	8.439 - 1	24.30 + 0	52.90 - 3
$\Lambda^* + K + \pi$	3.35 + 1	2	2	13.40 + 1	2.451 + 0	32.84 + 1	70.51 - 2
$\Lambda^* + K + 2\pi$	9.74 + 0	1	4.333	42.20 + 0	7.121 + 0	30.05 + 1	64.51 - 2
$\Lambda^* + K + 3\pi$	6.77 - 1	3.333 - 1	10	22.56 - 1	2.068 + 1	46.65 + 0	10.01 - 2
$\Lambda^* + K + 4\pi$	1.35 - 2	8.333 - 2	24	27.00 - 3	6.008 + 1	16.22 - 1	34.78 - 4
$\Lambda^* + K + 5\pi$	8.07 - 5	1.667 - 2	59.33	79.81 - 6	1.745 + 2	13.93 - 3	29.84 - 6
$\Lambda + K^*$	1.48 + 1	6	0.667	59.23 + 0	8.439 - 1	49.98 + 0	10.73 - 2
$\Lambda + K^* + \pi$	3.07 + 1	6	1	18.42 + 1	2.451 + 0	45.15 + 1	96.92 - 2
$\Lambda + K^* + 2\pi$	7.47 + 0	3	2	44.82 + 0	7.121 + 0	31.92 + 1	68.52 - 2
$\Lambda + K^* + 3\pi$	3.79 - 1	1	4.333	16.42 - 1	2.068 + 1	33.96 + 0	72.91 - 3
$\Lambda + K^* + 4\pi$	5.05 - 3	2.5 - 1	10	12.63 - 3	6.008 + 1	75.88 - 2	16.29 - 4

- T A B L E III -

Etat Final	ρ	f_{SI}	P	$\rho \cdot f_{SI} \cdot P$	f_ω	W	%
$\Lambda^* + K^*$	1.32 + 1	6	1	79.20 + 0	8.439 - 1	66.84 + 0	14.35 - 2
$\Lambda^* + K^* + \pi$	1.45 + 1	6	2	17.40 + 1	2.451 + 0	42.65 + 1	91.55 - 2
$\Lambda^* + K^* + 2\pi$	1.66 + 0	3	4.333	21.58 + 0	7.121 + 0	15.37 + 1	32.99 - 2
$\Lambda^* + K^* + 3\pi$	3.15 - 2	1	10	31.50 - 2	2.068 + 1	65.14 - 1	13.98 - 3
$\Lambda^* + K^* + 4\pi$	1.05 - 4	2.5 - 1	24	63.00 - 5	6.008 + 1	37.85 - 3	81.26 - 6
$\Sigma + K$	1.56 + 1	2	1	31.20 + 0	8.439 - 1	26.16 + 0	56.53 - 3
$\Sigma + K + \pi$	4.76 + 1	2	2	19.04 + 1	2.451 + 0	46.67 + 1	10.02 - 1
$\Sigma + K + 2\pi$	2.11 + 1	1	4.333	91.43 + 0	7.121 + 0	65.11 + 1	13.98 - 1
$\Sigma + K + 3\pi$	2.31 + 0	3.33 - 1	10	76.99 - 1	2.068 + 1	15.92 + 1	34.18 - 2
$\Sigma + K + 4\pi$	7.99 - 2	8.333 - 2	24	15.98 - 2	6.008 + 1	96.01 - 1	20.61 - 3
$\Sigma + K + 5\pi$	9.70 - 4	1.667 - 2	59.33	95.94 - 5	1.745 + 2	16.74 - 2	35.94 - 5
$\Sigma + K^*$	1.44 + 1	6	1	85.80 + 0	8.439 - 1	72.91 + 0	15.54 - 2
$\Sigma + K^* + \pi$	2.49 + 1	6	2	29.88 + 1	2.451 + 0	73.24 + 1	15.72 - 1
$\Sigma + K^* + 2\pi$	5.08 + 0	3	4.333	66.03 + 0	7.121 + 0	47.02 + 1	10.09 - 1
$\Sigma + K^* + 3\pi$	2.02 - 1	1	10	20.20 - 1	2.068 + 1	41.77 + 0	89.67 - 3
$\Sigma + K^* + 4\pi$	1.94 - 3	2.5 - 1	24	11.64 - 3	6.008 + 1	69.93 - 2	15.01 - 4

- T A B L E IV -

Etat Final	ρ	f_{SI}	P	$\rho \cdot f_{SI} \cdot P$	f_ω	W	%
[Ξ] [Ξ] + 2 K	2.96 + 1	1	1.667	49.34 + 0	2.451 - 1	12.09 + 0	29.95 - 3
[Ξ] [Ξ] + 2 K + π	5.13 + 0	1	3	15.39 + 0	7.121 - 1	10.96 + 0	23.53 - 3
[Ξ] [Ξ] + 2 K + 2π	1.64 - 1	0.5	6.33	51.93 - 2	2.068 + 0	10.74 - 1	23.06 - 4
[Ξ] [Ξ] + 2 K + 3π	2.66 - 4	1.667 - 1	14.33	63.54 - 5	6.008 + 0	38.17 - 4	81.94 - 7
[Ξ] [Ξ] + K^* + K	1.22 + 1	6	1.667	12.20 + 1	2.451 - 1	29.90 + 0	64.19 - 3
[Ξ] [Ξ] + K^* + K + π	4.44 - 1	6	3	79.92 - 1	7.121 - 1	56.91 - 1	12.22 - 3
[Ξ] [Ξ] + K^* + K + 2π	1.31 - 3	3	6.333	24.89 - 3	2.068 + 0	51.47 - 3	11.05 - 5
[Ξ] [Ξ] + K^* + K + 3π	8.29 - 8	1	14.33	11.88 - 7	6.008 + 0	71.38 - 7	15.32 - 9
[Ξ] [Ξ] + 2 K^*	1.57 + 0	9	1.667	23.55 + 0	2.451 - 1	57.70 - 1	12.39 - 3
[Ξ] [Ξ] + 2 K^* + π	2.76 - 5	9	3	74.52 - 5	7.121 - 1	53.07 - 5	11.39 - 7
N + K + $\bar{K}$	6.68 + 1	2	1.667	22.27 + 1	2.451 - 1	54.58 + 0	11.72 - 2
N + K + $\bar{K}$ + π	2.79 + 1	2	3	16.74 + 1	7.121 - 1	11.92 + 1	25.59 - 2
N + K + $\bar{K}$ + 2π	2.77 + 0	1	6.333	17.54 + 0	2.068 + 0	36.27 + 0	77.86 - 3
N + K + $\bar{K}$ + 3π	8.01 - 2	3.333 - 1	14.33	38.26 - 2	6.008 + 0	22.99 - 1	49.35 - 4
N + K + $\bar{K}$ + 4π	7.38 - 4	8.333 - 2	34	20.91 - 4	1.745 + 1	36.49 - 3	78.34 - 6

- T A B L E V -

Etat Final	ρ	f_{SI}	P	$\rho \cdot f_{SI} \cdot P$	f_ω	W	%
$N + K^* + \bar{K}$	3.84 + 1	6	1.667	38.41 + 1	2.451 - 1	94.14 + 0	20.21 - 2
$N + K^* + \bar{K} + \pi$	6.66 + 0	6	3	11.99 + 1	7.131 - 1	85.38 + 0	18.33 - 2
$N + K^* + \bar{K} + 2\pi$	2.00 - 1	3	6.333	38.00 - 1	2.068 + 0	78.58 - 1	16,87 - 3
$N + K^* + \bar{K} + 3\pi$	1.34 - 3	1	14.33	19.20 - 3	6.008 + 0	11.54 - 2	24.77 - 5
$N + K^* + \bar{K}^*$	1.75 + 1	18	1.667	52.51 + 1	2.451 - 1	12.37 + 1	27.63 - 2
$N + K^* + \bar{K}^* + \pi$	6.02 - 1	18	3	32.51 + 0	7.121 - 1	23.15 + 0	49.70 - 3
$N + K^* + \bar{K}^* + 2\pi$	1.64 - 3	9	6.333	93.48 - 3	2.068 + 0	19.33 - 2	41.50 - 5
$N^* + K + \bar{K}$	3.72 + 1	4	1.333	19.84 + 1	2.451 - 1	48.63 + 0	10.44 - 2
$N^* + K + \bar{K} + \pi$	8.32 + 0	4	3.333	11.09 + 1	7.121 - 1	78.97 + 0	16.95 - 2
$N^* + K + \bar{K} + 2\pi$	3.71 - 1	2	8	59.36 - 1	2.068 + 0	12.28 + 0	26.36 - 3
$N^* + K + \bar{K} + 3\pi$	3.72 - 3	6.667 - 1	19.67	48.78 - 3	6.008 + 0	29.31 - 2	62.92 - 5
$N^* + K + \bar{K} + 4\pi$	7.72 - 6	1.667 - 1	49.33	63.48 - 6	1.745 + 1	11.08 - 4	23.79 - 7

- T A B L E VI -

Etat Final	ρ	f_{SI}	P	$\rho . f_{SI} . P$	f_ω	W	%
$N^* + K^* + \bar{K}$	1.72 + 1	12	1.333	27.51 + 1	2.451 - 1	67.43 + 0	14.48 - 2
$N^* + K^* + \bar{K} + \pi$	1.03 + 0	12	3.333	41.20 + 0	7.121 - 1	29.34 + 0	62.99 - 3
$N^* + K^* + \bar{K} + 2\pi$	6.64 - 3	6	8	31.87 - 2	2.068 + 0	65.91 - 2	14.15 - 4
$N^* + K^* + \bar{K}^*$	3.89 + 0	36	1.333	18.67 + 1	2.451 - 1	45.76 + 0	98.24 - 3
$N^* + K^* + \bar{K}^* + \pi$	5.49 - 3	36	3.333	65.87 - 2	7.121 - 1	46.91 - 2	10.07 - 4
$N + N + \bar{N}$	1.12 + 1	4	1.667	74.68 + 0	2.451 + 1	18.30 + 2	39.90 - 1
$N + N + \bar{N} + \pi$	1.69 - 1	4	3	20.28 - 1	7.121 + 1	14.44 + 1	31.00 - 2
$N + N + \bar{N} + 2\pi$	8.42 - 6	2	6.333	10.66 - 5	2.068 + 2	22.04 - 3	47.32 - 6
$N^* + N + \bar{N}$	1.21 + 0	16	1.333	25.80 + 0	2.451 + 1	63.24 + 1	13.58 - 1
$N + \bar{N}^* + N$	1.21 + 0	8	1.333	12.90 + 0	2.451 + 1	31.62 + 1	67.88 - 2

- T A B L E VII -

PROBABILITES RELATIVES DES DIFFERENTS GROUPES D'ETATS FINAUX

ETATS FINAUX	%		
$N + n\pi$	37.283	79.679	85.955
$N^* + n\pi$	42.396		
$N + N + \bar{N} + n\pi$	4.240	6.277	
$N^* + N + \bar{N} + n\pi$	1.358		
$N + N + \bar{N}^* + n\pi$	0.679		
$\Lambda + K + n\pi$	1.719	6.465	12.253
$\Lambda^* + K + n\pi$	1.507		
$\Lambda + K^* + n\pi$	1.836		
$\Lambda^* + K^* + n\pi$	1.403		
$\Sigma + K + n\pi$	2.819	5.647	
$\Sigma + K^* + n\pi$	2.828		
$\Xi + 2K + n\pi$	0.0518	0.141	
$\Xi + K^* + K + n\pi$	0.0765		
$\Xi + 2K^* + n\pi$	0.0124		
$N + K + \bar{K} + n\pi$	0.456	1.185	1.794
$N + K^* + \bar{K} + n\pi$	0.403		
$N + K^* + \bar{K}^* + n\pi$	0.326		
$N^* + K + \bar{K} + n\pi$	0.301	0.609	
$N^* + K^* + \bar{K} + n\pi$	0.209		
$N^* + K^* + \bar{K}^* + n\pi$	0.099		

- T A B L E VIII -

ETATS FINAUX DE PROBABILITE $\geqslant$ 0,001 %

ETAT FINAL	%
$N + \pi$	0.620
$N + 2\pi$	9.640
$N + 3\pi$	17.817
$N + 4\pi$	7.991
$N + 5\pi$	1.151
$N + 6\pi$	0.064
$N + 7\pi$	0.002
$N^* + \pi$	1.152
$N^* + 2\pi$	14.636
$N^* + 3\pi$	19.811
$N^* + 4\pi$	6.217
$N^* + 5\pi$	0.562
$N^* + 6\pi$	0.018
$\Lambda + K$	0.045
$\Lambda + K + \pi$	0.568
$\Lambda + K + 2\pi$	0.859
$\Lambda + K + 3\pi$	0.230
$\Lambda + K + 4\pi$	0.016

ETAT FINAL	%
$\Lambda^* + K$	0.053
$\Lambda^* + K + \pi$	0.705
$\Lambda^* + K + 2\pi$	0.645
$\Lambda^* + K + 3\pi$	0.100
$\Lambda^* + K + 4\pi$	0.003
$\Lambda + K^*$	0.107
$\Lambda + K^* + \pi$	0.969
$\Lambda + K^* + 2\pi$	0.685
$\Lambda + K^* + 3\pi$	0.073
$\Lambda + K^* + 4\pi$	0.002
$\Lambda^* + K^*$	0.144
$\Lambda^* + K^* + \pi$	0.916
$\Lambda^* + K^* + 2\pi$	0.330
$\Lambda^* + K^* + 3\pi$	0.014
$\Sigma + K$	0.057
$\Sigma + K + \pi$	1.002
$\Sigma + K + 2\pi$	1.398
$\Sigma + K + 3\pi$	0.342
$\Sigma + K + 4\pi$	0.021

- T A B L E IX -

ETATS FINAUX DE PROBABILITE $\geqslant$ 0.001 %

ETAT FINAL	%	ETAT FINAL	%
$\Sigma + K^*$	0.155	$N + K^* + \bar{K}^*$	0.276
$\Sigma + K^* + \pi$	1.572	$N + K^* + \bar{K}^* + \pi$	0.050
$\Sigma + K^* + 2\pi$	1.009		
$\Sigma + K^* + 3\pi$	0.090	$N^* + K + \bar{K}$	0.104
$\Sigma + K^* + 4\pi$	0.002	$N^* + K + \bar{K} + \pi$	0.170
		$N^* + K + \bar{K} + 2\pi$	0.026
$\Xi + 2K$	0.026	$N^* + K + \bar{K} + 3\pi$	0.001
$\Xi + 2K + \pi$	0.024		
$\Xi + 2K + 2\pi$	0.002	$N^* + K^* + \bar{K}$	0.145
		$N^* + K^* + \bar{K} + \pi$	0.063
$\Xi + K^* + K$	0.064	$N^* + K^* + \bar{K} + 2\pi$	0.001
$\Xi + K^* + K + \pi$	0.012		
$\Xi + 2K^*$	0.012	$N^* + K^* + \bar{K}^*$	0.098
		$N^* + K^* + \bar{K}^* + \pi$	0.001
$N + K + \bar{K}$	0.117		
$N + K + \bar{K} + \pi$	0.256	$N + N + \bar{N}$	3.930
$N + K + \bar{K} + 2\pi$	0.078	$N + N + \bar{N} + \pi$	0.310
$N + K + \bar{K} + 3\pi$	0.005		
		$N^* + N + \bar{N}$	1.358
$N + K^* + \bar{K}$	0.202		
$N + K^* + \bar{K} + \pi$	0.183	$N + \bar{N}^* + N$	0.679
$N + K^* + \bar{K} + 2\pi$	0.017		

APPENDICE I

- B I B L I O G R A P H I E -

Nous donnons ici la bibliographie correspondant aux différents problèmes qui se posent lors de l'étude de la production multiple de particules ainsi qu'aux travaux expérimentaux et aux études quantiques et semi-quantiques qui ont été faites dans ce domaine

- THEORIE STATISTIQUE -

FERMI	Prog. Theor. Phys.	5 - 580 - 50
FERMI	Phys. Rev.	92 - 452 - 53
MILBURN	Rev. Mod. Phys.	27 - 1 - 55
TAKAHASHI	Nuov. Cim.	4 - 530 - 56
MAKSIMENKO - NIKISHOV	J.E.T.P.	4 - 6142 - 57
MAKSIMENKO - NIKISHOV	J.E.T.P.	8 - 909 - 59
MAGALINSKEI-TEILETSEI	J.E.T.P.	5 - 483 - 57
YAMAMOTO	Prog. Theor. Phys.	18 - 81 - 57
BARASHENKOV et Al.	Nucl. Phys.	5 - 17 - 58
BARASHENKOV et Al.	Nucl. Phys.	7 - 117 - 58
ITO-TANAKA	Nuov. Cim. Sup.	7 - 91 - 58
HAGEDORN	Nuov. Cim.	15 - 246 - 60
HAGEDORN	Nuov. Cim.	15 - 434 - 60
HAGEDORN	Rap. CERN	59 - 3
CERULUS-VON BEHR	Nuov. Cim.	16 - 1046 - 60

- CALCUL DE L'ELEMENT D'ESPACE DES PHASES -

FERMI	Prog. Theor. Phys.	5 - 570 - 50
BLOCK	Phys. Rev.	101 - 796 - 56
PODGORETSKEI-ROZENTAL	J.E.T.P.	27 - 129 - 54
LEPORE-STUART	Phys. Rev.	94 - 1724 - 54
ROZENTAL	J.E.T.P.	1 - 166 - 55 (28-118)
MILBURN	Rev. Mod. Phys.	27 - 1 - 55
FIALHO	Phys. Rev.	105 - 328 - 57
MAKSIMENKO-ROZENTAL	J.E.T.P.	5 - 546 - 57 (32-657)
HAGEDORN	Nuov. Cim. Sup.	9 - 646 - 58

- LE PROBLEME DES ISOBARES -

PEASLEE	Phys. Rev.	94 - 1085 - 54
PEASLEE	Phys. Rev.	95 - 1580 - 54
BELENKEI-NIKISHOV	J.E.T.P.	1 - 593 - 55 (28-744)
NIKISHOV	J.E.T.P.	3 - 635 - 56 (30-601)
NIKISHOV	J.E.T.P.	3 - 783 - 56 (30-990)
MAKSIMENKO-NIKISHOV	J.E.T.P.	4 - 614 - 57 (31-727)
BELENKEI	Nucl. Phys.	2 - 259 - 56
STERNHEIMER-LINDENBAUM	Phys. Rev.	105 - 1874 - 57
STERNHEIMER-LINDENBAUM	Phys. Rev.	106 - 1107 - 57
STERNHEIMER-LINDENBAUM	Phys. Rev.	109 - 1723 - 56
MEIER	Nuov. Cim.	11 - 307 - 59
BARSHAY	Phys. Rev.	106 - 572 - 57
CREW-HILL	Phys. Rev.	106 - 1051 - 57
WILSON	Phys. Rev.	110 - 1212 - 58

- COLLISIONS CENTRALES ET COLLISIONS PERIPHERIQUES -

BLOCKINTSEV	Rapp. CERN	56 - 2
BLOCKINTSEV	CERN Symposium	2 - 155 - 56
BARASHENKOV et Al.	Nucl. Phys.	9 - 74 - 58
BARASHENKOV et Al.	Nucl. Phys.	13 - 583 - 58
BARASHENKOV et Al.	Nucl. Phys.	15 - 486 - 59

BARASHENKOV et Al.	Nucl. Phys.	17 - 377 - 59
BUBELEV	J.E.T.P.	6 - 421 - 59
CERULUS-VON BEHR	Nuov. Cim.	16 - 1046 - 60

- LES DISTRIBUTIONS DE CHARGE -

CERULUS-HAGEDORN	Rap. CERN	59 - 3
YAMAMOTO	Prog. Theor. Phys.	19 - 81 - 57
ROSE	Theory of angular momentum (J. Wiley & Sons, N.Y., 1957)	
COURTOT	Thèse de 3ème cycle, Lyon	1960
CERULUS	Nuov. Cim. Sup.	15 - 402 - 60

- LES TRAVAUX EXPERIMENTAUX -

FOWLER-MAENCHEN	Phys. Rev., 101 - 911 - 56	n-p à 6.2 GeV
FOWLER	Phys. Rev., 103 - 1489 - 56	p-p à 2.75 GeV
GESTER	Phys. Rev., 103 - 1442 - 56	p-p à 3 GeV
FOWLER	Phys. Rev., 103 - 1479 - 56	p-p à 1.5 GeV
YUAN-LINDENBAUM	Phys. Rev., 93 - 1431 - 54	p-N à 2.3 GeV
FOWLER et Al.	Phys. Rev., 95 - 1026 - 54	n-p à 2.2 GeV
EISBERG-FOWLER	Phys. Rev., 97 - 797 - 55	π^--p à 1.4 GeV
WALLENMAYER	Phys. Rev., 105 - 1058 - 57	n-p à 6.2 GeV
MAENCHEN, FOWLER et Al.	Phys. Rev., 108 - 850 - 57	π^--p à 5 GeV
WALKER	Phys. Rev., 108 - 872 - 57	π^--N à 4.5 GeV
DERATO-SMITZ	Phys. Rev., 115 - 309 - 60	π^--N à 1.5 GeV
FRIEDHANDLER	Nuov. Cim., 14 - 796 - 59	p-N à 9 GeV
BLAN et Al.	Nuov. Cim., 14 - 704 - 59	π^--N à 960 MeV
BARASHENKOV	Nucl. Phys., 9 - 74 - 58	p-N à 9 GeV
BARASHENKOV	Nucl. Phys., 22 - 71 - 61	π^--N à 6.8 GeV
Conference on High-Energy Physics at Rochester		1960

- DISTRIBUTIONS ANGULAIRES -

FERMI	Phys. Rev.	31 - 681 - 51
KOBA	Nuov. Cim.	16 - 610 - 60
SELLERI	Communications personnelle	

- ETUDES QUANTIQUES -

KOVACS	Phys. Rev.	101 - 397 - 56
HENLEY-LEE	Phys. Rev.	101 - 1536 - 56
RODBERG	Phys. Rev.	106 - 1190 - 57
LICHTENBERG	Phys. Rev.	105 - 1084 - 57
FRANCKLIN	Phys. Rev.	105 - 1101 - 57
KAZES	Phys. Rev.	107 - 1131 - 57
SRIVASTANA-SUDARSHAN	Phys. Rev.	110 - 765 - 58
RAMAKRISHNAN	Nucl. Phys.	10 - 160 - 59
KUNDU	Prog. Theor. Phys.	20 - 939 - 58
KOBAYAKAWA-IMANURA	Prog. Theor. Phys.	23 - 137 - 60
SELLERI	Nuov. Cim.	15 - 465 - 60
SELLERI	Phys. Rev. Let.	6 - 64 - 61
SALZMAN	Phys. Rev. Let.	5 - 377 - 60
SALZMAN	Phys. Rev.	120 - 599 - 60
D'ESPAGNAT-PRENTKI	Nuov. Cim.	1 - 1225 - 55

APPENDICE II

- LES NOMBRES AU HASARD -

I - METHODE DE GENERATION DE NOMBRES AU HASARD -

Nous avons utilisé une méthode proposée par LEHMER (Symposium on Monte-Carlo methods, J. Wiley & Sons). Cette méthode par congruence (au sens arithmétique du terme) fournit une suite de nombres K_n de très grande période (environ 6.10^6).

La formule employée est :

$$K_n = A\, K_{n-1} \pmod{M} \qquad (1)$$

c'est à dire que K_n est le reste de la division par M du produit $A\, K_{n-1}$.

Les valeurs choisies pour les constantes sont :

$A = 23$ $\qquad$ $K_o = 23^6$ $\qquad$ et $\qquad$ $M = 10^8 + 1$

Nous nous sommes limités à des nombres K_n de 8 chiffres ; cette limitation étant dûe au type d'ordinateur employé (IBM 650). Divers tests ont été effectués, qui permettent de vérifier dans quelle mesure la suite obtenue pouvait être considérée comme une distribution uniforme de nombres au hasard.

On considère comme nombres au hasard indépendants les nombres formés par les 4 chiffres de gauche, les 4 du centre et les 4 de droite.

Nous avons appliqué les tests de hasard aux quatre séries de nombres obtenus de la façon suivante :

- en ne prenant que le nombre droit (courbe I)

- en ne prenant que le nombre du centre (courbes II)
- en ne prenant que le nombre gauche (courbes III)
- en prenant successivement le gauche, le centre, le droit, etc ... (courbes IV)

II - TEST SUR LA MOYENNE -

La moyenne de N nombres au hasard répartis uniformément de 0 à 1, est 0,5. La variance est facilement calculable :

$$\sigma^2 = \int_0^1 x^2\,dx - \left[\int_0^1 x\,dx\right]^2 = \frac{1}{12}$$

Nous avons pris comme intervalle de sécurité $\sigma/\sqrt{N}$, qui est l'estimation de la variance de la moyenne (cette condition est très restrictive, elle correspond à une probabilité de 68 %). Les figures 11 et 12 montrent la convergence de la moyenne en fonction de N. On y a aussi porté la variation de la quantité $\sigma/\sqrt{N}$.

Avec N = 1900 nombres ($\sigma/\sqrt{N}$ = 0,0066), on obtient :

Moyenne théorique	Moyenne droite	Moyenne centre	Moyenne gauche	Moyenne du mélange
$0{,}5000 \pm 0{,}0066$	0,50481	0,50253	0,49973	0,49471

III - TEST DU χ^2 SUR L'UNIFORMITE DE LA DISTRIBUTION -

Pour vérifier si la distribution est uniforme, on divise l'intervalle 0-1 en 20 classes d'égale probabilité et on compte combien de nombres n_i tombent dans chaque classe i. Chaque classe aura en moyenne $\frac{N}{20}$ nombres.

$$\chi^2 = \frac{\sum_i^{20} \left| n_i - \frac{N}{20} \right|^2}{\frac{N}{20}}$$

il y a 20 classes, donc 19 degrés de liberté.

Les figures 13 et 14 montrent la variation de ce χ^2 en fonction de N.

IV - TEST DU χ^2 SUR LE TEMPS DE RETOUR D'UNE CLASSE -

La probabilité Pd pour avoir un intervalle d (différence de rang) entre deux nombres appartenant à la même classe est la probabilité pour que, lorsque 1 nombre est créé, les d-1 nombres suivants appartiennent à l'une quelconque des 19 autres classes et que le $d^{ième}$ appartienne à la sienne.

La probabilité pour qu'il tombe dans une quelconque des 19 autres classes est 19/20.

La probabilité cherchée est donc :

$$Pd = \frac{1}{20} \left[\frac{19}{20} \right]^{d-1}$$

Pour que Pd ait un sens, il faut que $d \geqslant 1$, d entier. Nous pouvons vérifier que :

$$\sum_1^{\infty} Pd = 1$$

En effet :

$$Pd = \frac{1}{20} \sum_1^{\infty} \left(\frac{19}{20}\right)^{d-1} = \frac{1}{20} \sum_0^{\infty} \left(\frac{19}{20}\right)^{d}$$

$$= \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{1 - \frac{19}{20}} = \frac{20}{20} = 1$$

en utilisant le développement :

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \ldots\ldots\ldots = \sum_0^{\infty} x^n$$

Valeur moyenne de l'intervalle : elle est donnée par :

$$\langle d \rangle = \int_0^\infty d\, P(d)\, \delta d = \sum_0^\infty d\, Pd = \frac{1}{20} \sum_0^\infty d \left[\frac{19}{20}\right]^{d-1}$$

Nous avons vu que :

$$\sum_0^\infty x^n = \frac{1}{1-x}$$

En dérivant les deux nombres nous obtenons :

$$\sum_0^\infty n\, x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Il vient :

$$\langle d \rangle = \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{(1-\frac{19}{20})^2} = \frac{1}{20} \cdot (20)^2 = 20 \quad ; \quad \boxed{\langle d \rangle = 20}$$

Pour tester la loi de probabilité (2) nous avons compté le nombre de fois où l'intervalle d entre deux nombres d'une même classe est tel que $n < d \leqslant p$, en prenant pour n et p : 0 et 5, 5 et 10, 10 et 20, 20 et 50, 50 et 100.

Nous appellerons $P_n^{\,p}$ la probabilité pour que $n < d \leqslant p$. On a :

$$P_n^{\,p} = \sum_{n+1}^{p} Pd$$

$$P_n^{\,p} = \frac{1}{20} \left[\left(\frac{19}{20}\right)^n + \left(\frac{19}{20}\right)^{n+1} + \ldots\ldots\ldots + \left(\frac{19}{20}\right)^{p-1} \right]$$

La somme d'une série géométrique de n termes, de raison q et de premier terme a est :

$$S = a\, \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Nous avons donc :

$$P_n^{\,p} = \frac{1}{20} \cdot \left(\frac{19}{20}\right)^n \cdot \frac{1 - \left(\frac{19}{20}\right)^{p-n}}{1 - \frac{19}{20}} = \left(\frac{19}{20}\right)^n \left[1 - \left(\frac{19}{20}\right)^{p-n}\right]$$

d'où :

$$P_n^{\,p} = \left(\frac{19}{20}\right)^n - \left(\frac{19}{20}\right)^p \qquad (3)$$

Les 5 classes choisies : $P_0^{\,5}$, $P_5^{\,10}$, $P_{10}^{\,20}$, $P_{20}^{\,50}$ et $P_{50}^{\,100}$ seront notées $P_{(1)}$, $P_{(2)}$, $P_{(3)}$, $P_{(4)}$ et $P_{(5)}$. Nous avons appliqué le test de χ^2 à la loi de probabilité (3).

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{5} \frac{N\left[P_{(i)\,exp} - P_{(i)\,theor}\right]^2}{P_{(i)\ theor}}$$

il y a 4 degrés de liberté.

Les figures 15 et 16 représentent la variation de ce χ^2 en fonction de N.

Nous avons aussi tracé les courbes de convergence de $P_n^{\,p}$ en fonction de N, mais nous ne les reproduisons pas ici car les courbes 15 et 16 qui s'en déduisent sont moins nombreuses et plus significatives au point de vue probabilité.

Avec N = 1900, nous obtenons :

	Théorie	Droit	Centre	Gauche	Mélange
$P_0^{\,5}$	22,62 %	22,47 %	23,11 %	22,58 %	22,60 %
$P_5^{\,10}$	17,50 %	17,42 %	17,26 %	17,16 %	18,59 %
$P_{10}^{\,20}$	24,02 %	25,52 %	23,63 %	24,16 %	22,50 %
$P_{20}^{\,50}$	28,16 %	27,00 %	29,05 %	29,16 %	29,06 %
$P_{50}^{\,100}$	7,11 %	7,58 %	6,95 %	6,95 %	7,23 %

V - CONCLUSION SUR LES NOMBRES AU HASARD -

L'examen des courbes montre que :

a) Figures 11 et 12 : les moyennes se situent presque toujours à l'intérieur de l'intervalle de sécurité. Elles sont donc acceptables pour les 4 séries de nombres.

b) Figures 13 et 14 : pour être acceptable, un χ^2 soit être de l'ordre de grandeur du degré de liberté. Donc, pour l'uniformité de la distribution, les nombres de droite et ceux du centre (I et II) sont acceptables, mais ceux de gauche et ceux du mélange ont un χ^2 trop faible.

c) Figures 15 et 16 : les nombres de droite (I) et, à la rigueur, ceux du mélange (IV) sont acceptables, mais ceux de gauche et du centre (II et III) doivent être rejetés, leur χ^2 étant beaucoup trop faible.

Nous pensons donc, que, contrairement à ce qui est fait habituellement, il est préférable de ne prendre comme nombres au hasard que la partie droite des nombres obtenus.

Un gros intérêt de cette méthode de génération de nombres au hasard sur ordinateur électronique est que l'on peut obtenir n'importe quelle distribution à partir de la distribution uniforme que l'on a testée : il suffit de diviser l'intervalle 0-1 en un nombre de classes proportionnel à la précision voulue et de pondérer chaque classe suivant la distribution envisagée.

LEGENDE DES FIGURES

Figures 11 et 12 : Variation de la moyenne en fonction de N. La ligne droite continue représente la moyenne théorique 0,5.
On a porté, de part et d'autre de cette moyenne, la variation de l'intervalle de sécurité $\sigma/\sqrt{N}$.

Figures 13 et 14 : Variation de χ^2 pour l'uniformité de la distribution en fonction de N.
La ligne droite continue représente le degré de liberté.

Figures 15 et 16 : Variation de χ^2 pour le temps de retour d'une classe en fonction de N.
La ligne droite continue représente le degré de liberté.

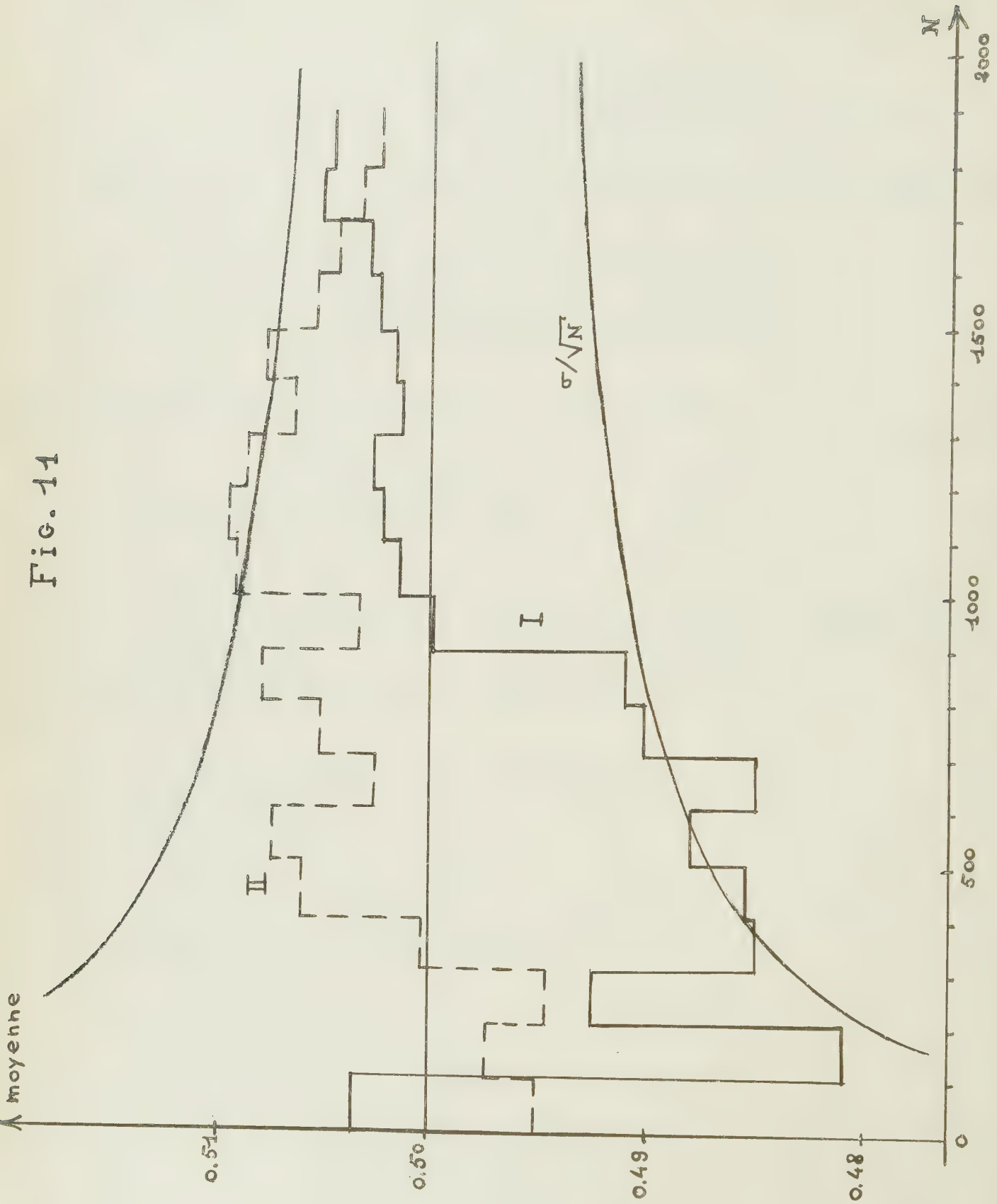


Fig. 11

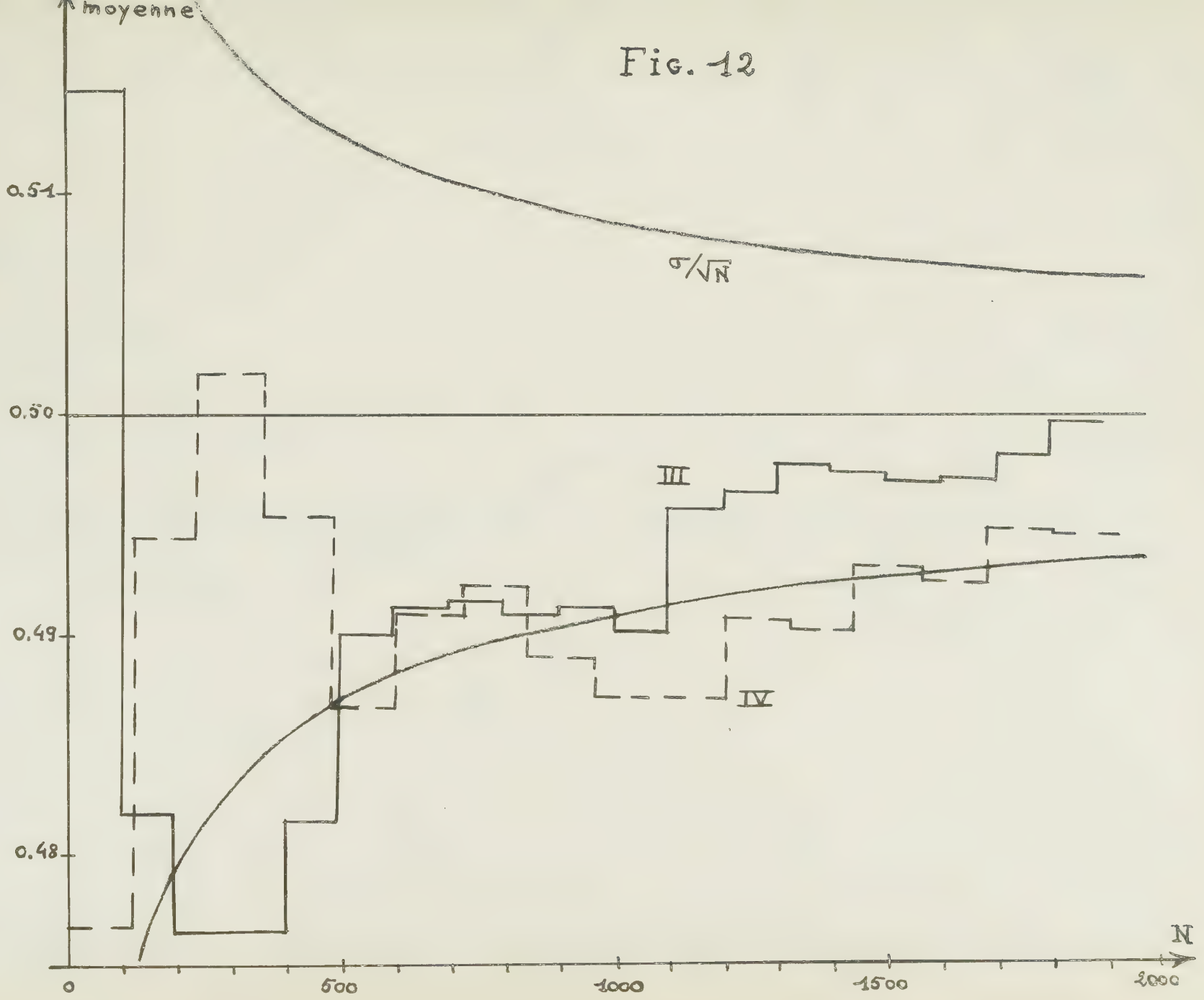


Fig. 12

Fig. 13

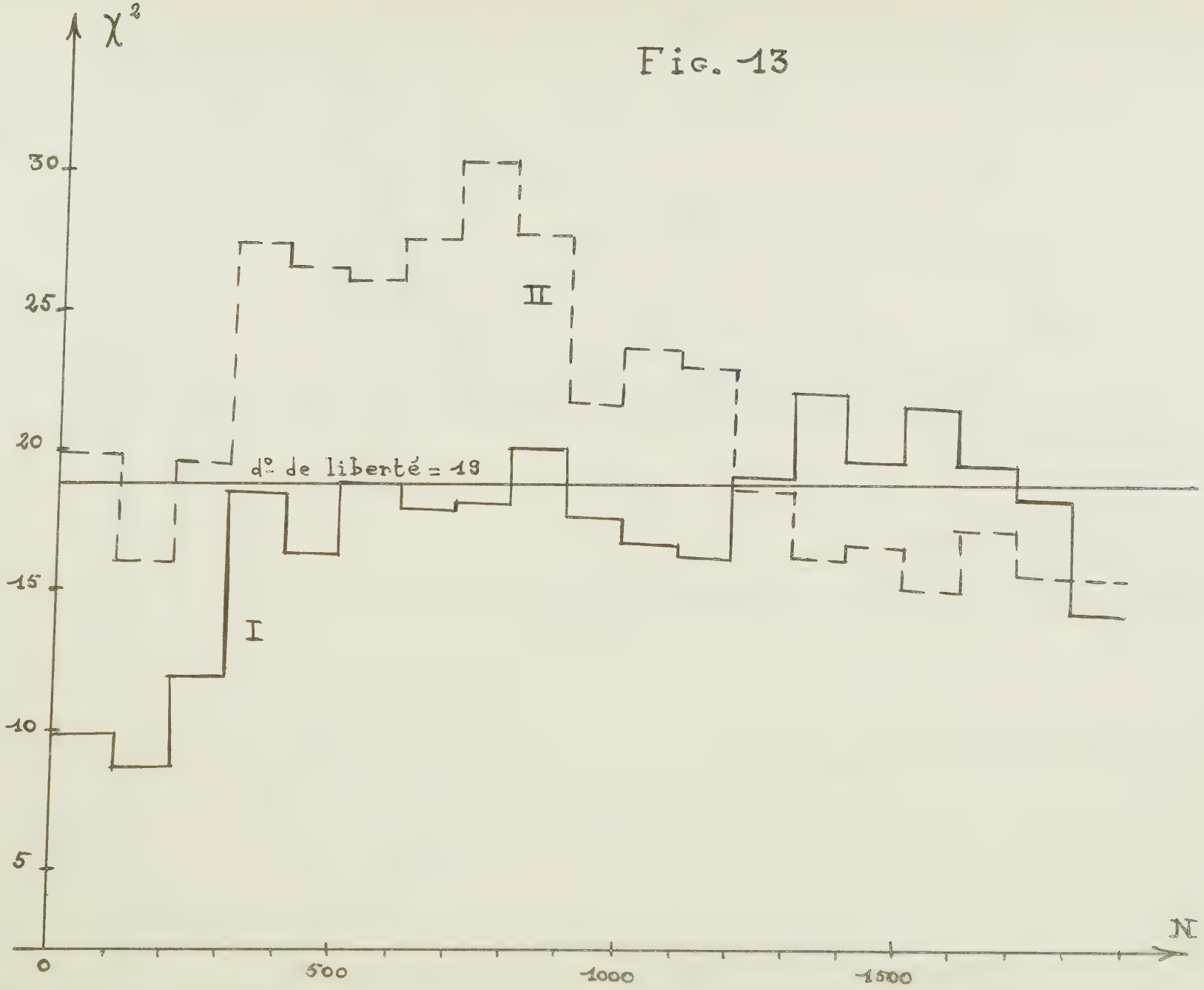
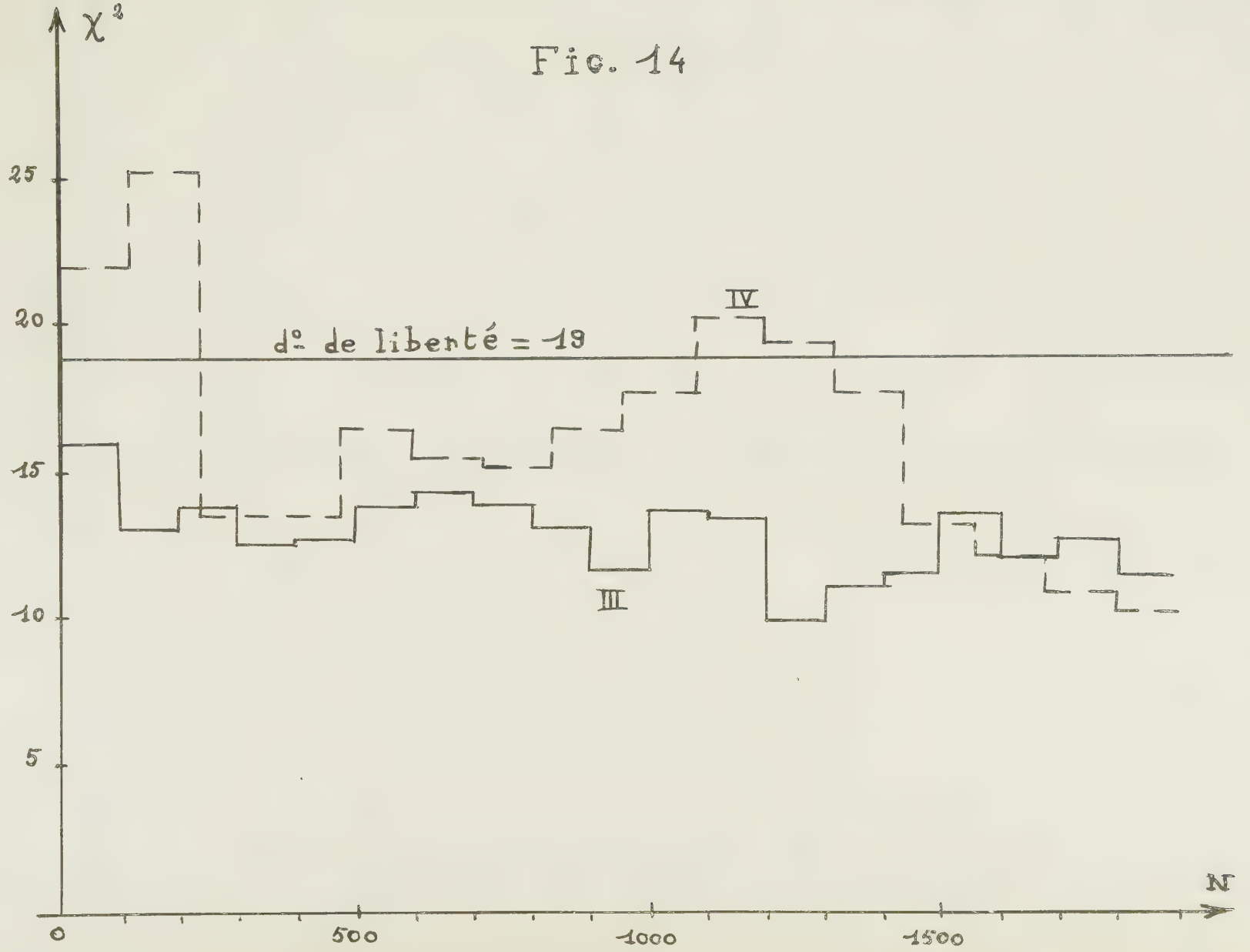


Fig. 14



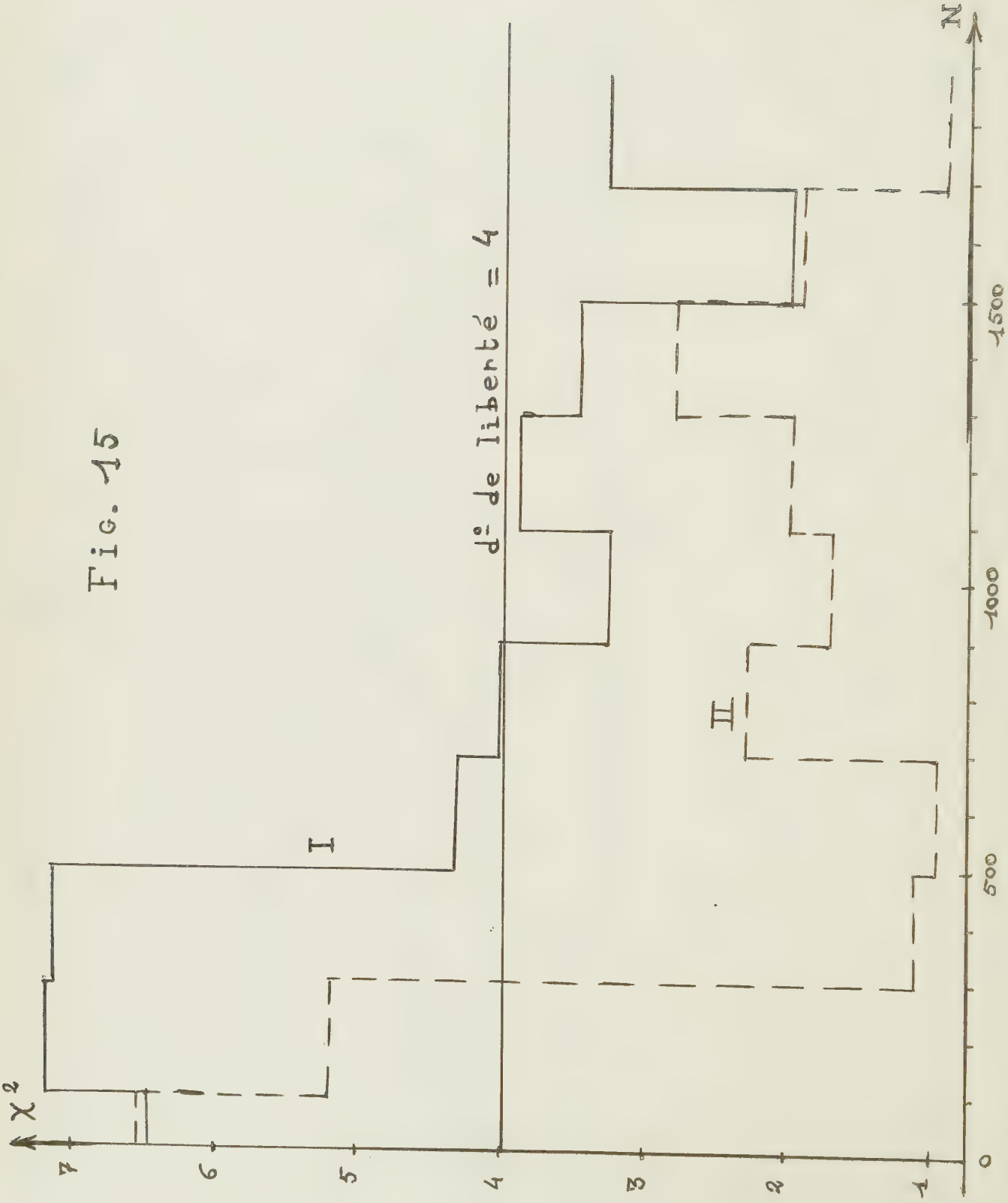


Fig. 15

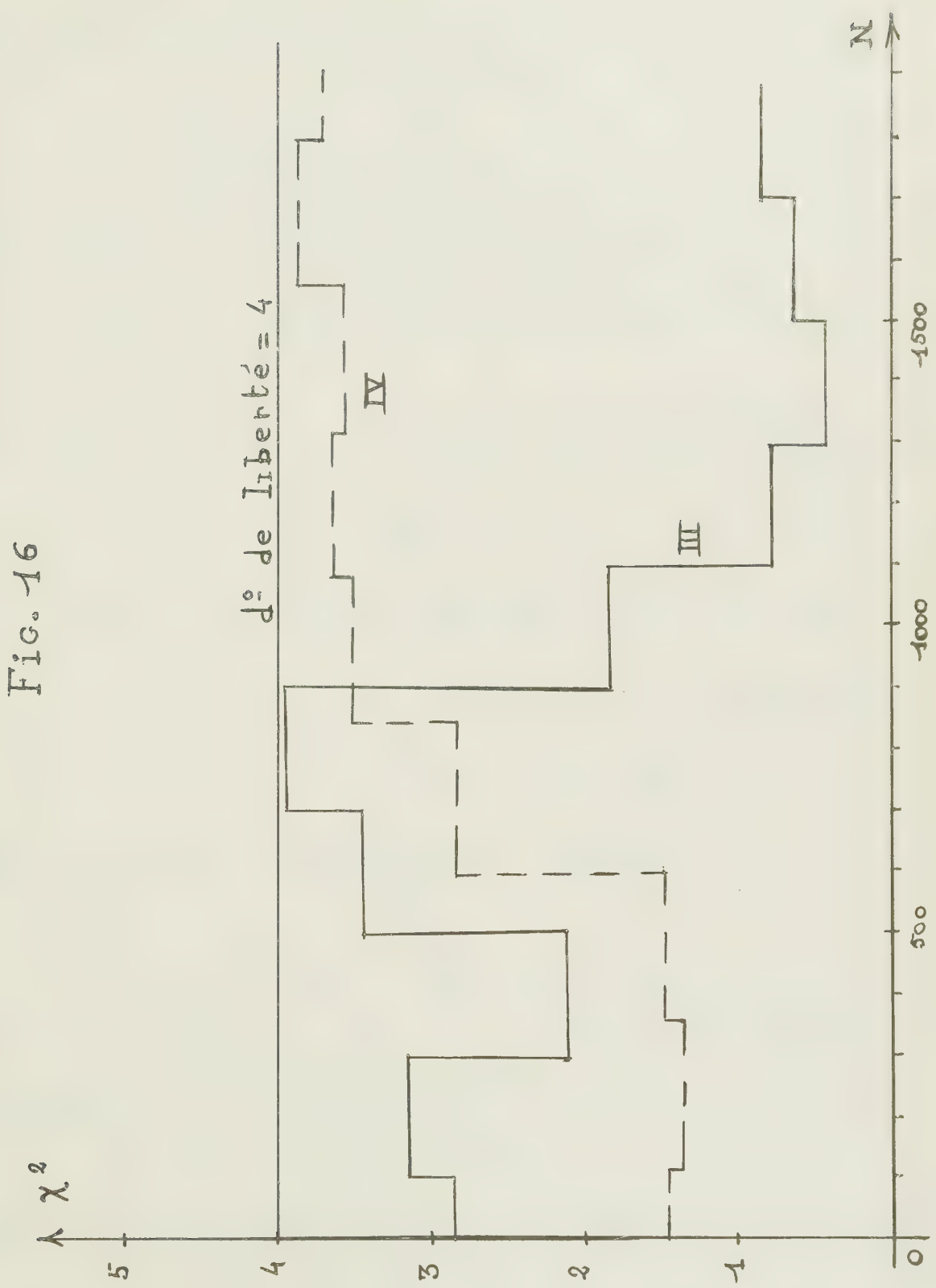


Fig. 16

APPENDICE III

PASSAGE DU SYSTEME DU LABORATOIRE AU SYSTEME DU CENTRE DE MASSE

A/ En relativité, l'énergie totale vérifie les relations :

$$E^2 = \begin{cases} \dfrac{m^2 c^4}{1 - \beta^2} \\ p^2 c^2 + m^2 c^4 \end{cases}$$

ce qui permet d'écrire :

$$E^2 (1 - \beta^2) = m^2 c^4$$

$$\beta^2 = \frac{m^2 c^4 - E^2}{- E^2}$$

$$= \frac{p^2 c^2}{E^2}$$

si $\gamma^2 = \dfrac{1}{1 - \beta^2}$ nous obtenons $\begin{cases} \beta = pc/E \\ \gamma^2 = \dfrac{E^2}{E^2 - p^2 c^2} \end{cases}$ (1

B/ Soient m_1 et m_2, les masses de deux particules. P_1 et P_2, leurs impulsions, E_1 et E_2 leurs énergies totales dans le système du laboratoire, E la somme de ces énergies.

Les mêmes quantités surmontées d'une barre correspondent au système du centre de masse. La transformation de Lorentz permet d'écrire :

$$E_1 = \gamma \left[\bar{E}_1 + \beta \bar{P}_1 \right]$$
$$E_2 = \gamma \left[\bar{E}_2 + \beta \bar{P}_2 \right]$$

Faisons la somme :

$$E_1 + E_2 = \gamma \left[(\bar{E}_1 + \bar{E}_2) + \beta (\bar{P}_1 + \bar{P}_2) \right]$$

Le second terme du crochet est nul, par définition même du système du centre de masse. Il vient donc :

$$E = \gamma \bar{E} \qquad (2)$$

C/ Dans le cas particulier où $E_2 = m_2$ (particule au repos), (on a fait c = 1) $P_2 = 0$.

$$\begin{cases} E = E_1 = m_2 \\ p = p_1 \end{cases}$$

Les relations (1) permettent d'écrire : $\beta = \dfrac{p_1}{E_1 + m_2}$

d'où :

$$\gamma^2 = \frac{(E_1 - m_2)^2}{(E_1 + m_2)^2 - p_1^2} = \frac{E^2}{E_1^2 + m_2^2 + 2E_1 m_2 - P_1^2}$$

puisque :

$$E_1^2 = p_1^2 + m_1^2,$$

on a :

$$\gamma^2 = \frac{E^2}{p_1^2 + m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 m_2 - p_1^2}$$

$$\gamma^2 = \frac{E^2}{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 m_2}$$

Or d'après (2) : $\gamma = E/\bar{E}$

Nous avons donc :

$$\bar{E}^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 m_2$$

Faisons intervenir l'énergie cinétique T_1 (la donnée physique du problème)

$$\bar{E}^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2 (T_1 + m_1) m_2$$

$$\boxed{\frac{\bar{E}}{m_2} = \left[\frac{2 T_1}{m_2} + (1 + \frac{m_1}{m_2})^2 \right]^{1/2}}$$

Si m_2 est un nucléon et quenous exprimons tout en énergie de masse d'un nucléon nous aurons :

$$\boxed{\bar{E} = \left[2 T_1 + (1 + m_1)^2 \right]^{1/2}}$$

Si m_1 est aussi un nucléon :

$$\bar{E} = \left[2 T_1 + 4 \right]^{1/2}$$

Dans le cas général :

$$\bar{E} = (m_1 + m_2) \left[1 + \frac{2 T_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \right]^{1/2}$$

C O N C L U S I O N

A partir d'une idée de T. ERICSON, nous avons introduit une méthode nouvelle pour le calcul de l'élément de l'espace des phases qui intervient dans la théorie statistique de l'émission de particules dans les intéractions à haute énergie.

Cette méthode a les caractéristiques suivantes :

- bonne précision dans le cas de l'émission de 5 particules au moins,
- précision suffisante dans le cas de l'émission de 3 et 4 particules,
- gain sur le temps de calcul atteignant un facteur supérieur à 2 par 5 particules, un facteur 200 pour 10 particules.

Elle permet donc d'obtenir les résultats de la théorie statistique avec des moyens relativement réduits.

L'application au cas des collisions π^- - p à 5 GeV nous a conduit à mettre en évidence l'accord général entre expérience et théorie pour les probabilités d'émission des mésons π et des particules étranges mais une faible en ce qui concerne la production des antinucléons.

R E F E R E N C E S

CHAPITRE I -

(1)	FERMI	Prog. Theor. Phys.	5 - 570 - 50
(2)	BLOCK	Phys. Rev.	101 - 796 - 56
(3)	LEPORE-STUART	Phys. Rev.	94 - 1724 - 54
(4)	FIALHO	Phys. Rev.	105- 328 - 57

CHAPITRE III -

(5)	CERULUS-HAGEDORN	Nuov. Cim. Sup.	9 - 646 - 56
(6)	ERICSON (CERN)	Communication personnelle	
(7)	LAVERRIERE	Nucl. Phys.	à paraître

CHAPITRE V -

(8)	CERULUS-HAGEDORN	Rap. CERN	59 - 3
(9)	HAGEDORN (CERN)	Communication personnelle	

CHAPITRE VI -

(10)	ŠOLN (CERN)	Communication personnelle	
(11)	HAGEDORN	Nuov. Cim.	15 - 246 - 60
(12)	HAGEDORN	Nuov. Cim.	15 - 434 - 60
(13)	YEIVIN-DE SHALIT	Nuov. Cim.	1 - 1146 - 55
(14)	BARASHENKOV	Nuov. Cim. Sup.	7 - 19 - 38
(15)	MAENCHEN et Al.	Phys. Rev.	108 - 850 - 57
(16)	International Conference on Theoretical Aspects of very high-energy phenomena :	Rap. CERN	61 - 22

TABLE DES MATIERES

pages

INTRODUCTION 1

CHAPITRE I - EXPOSE DES PROBLEMES 5

1 - Les bases de la théorie statistique
- Etablissement de la formule générale
- L'élément de matrice
- La densité des états finaux
- Les conditions physiques
- Expression du poids statistique

2 - Calcul de l'élément d'espace des phases

3 - Le problème des isobares

4 - Collisions centrales et périphériques

5 - Les distributions de charge

6 - Moment angulaire et distributions angulaires

CHAPITRE II - METHODE ANTERIEURES DE CALCUL DE L'ELEMENT D'ESPACE DES PHASES 13

1 - Calcul de Fermi
- Approximation non relativiste
- Approximation ultra-relativiste

2 - Calcul direct

3 - Calculs analytiques
- Approche analytique
- Approximation de Lepore et Stuart
- Approximation de Fialho

CHAPITRE III - CALCULS UTILISANT LA METHODE DE MONTE-CARLO 21

1 - Approche analytique

2 - Calcul de Hagedorn

3 - Approximation gaussienne

CHAPITRE IV - REALISATION PRATIQUE DES CALCULS 39

1 - Utilisation de la méthode de Monte-Carlo : Le problème du tirage

2 - Organigramme des calculs

3 - Estimation de l'erreur

4 - Les spectres

CHAPITRE V - TESTS DE VALIDITE DE L'APPROXIMATION GAUSSIENNE 45

1 - Pour une énergie de 2.75 GeV

2 - Pour une énergie de 25 GeV

3 - Ordre de grandeur de l'approximation

4 - Amélioration possible de la méthode

5 - Vérification de cette amélioration

6 - Durée des calculs

CHAPITRE VI - PRODUCTION MULTIPLE DE PARTICULES DANS LES COLLISIONS π^- - p A 5 GeV 63

1 - Les conditions physiques

- Conservation de l'énergie
- Conservation de l'étrangeté
- Conservation du nombre de baryons

2 - Expression du poids statistique

- Le facteur d'intéraction
- Le facteur de spin
- Le facteur d'indiscernabilité
- Le facteur de spin isotopique
- Le facteur d'espace des phases

3 - Résultats obtenus

- Probabilités relatives des différents processus
- Production des mésons π
- Production de particules étranges
- Production d'antiparticules

APPENDICE I - BIBLIOGRAPHIE 87

APPENDICE II - LES NOMBRES AU HASARD 91

1 - Méthode de génération de nombres au hasard
2 - Test sur la moyenne
3 - Test du sur l'uniformité de la distribution
4 - Test du sur le temps de retour d'une classe
5 - Conclusion

APPENDICE LII - PASSAGE DU SYSTEME DU LABORATOIRE AU SYSTEME DU CENTRE DE MASSE 104

CONCLUSION 107

REFERENCES 109

TABLES DES MATIERES 111

Vu :
Les Membre du Jury

MM. SARAZIN
LAFOUCRIERE
PHILBERT

Vu et approuvé :
Le Doyen de la Faculté des Sciences

Pour le DOYEN,
l'Assesseur,

M. J. BRACONNIER

Vu et Accordé le permis d'imprimer

Lyon le 18 Décembre 1961

Le Recteur,
Président du Conseil de l'Université,

P. LOUIS